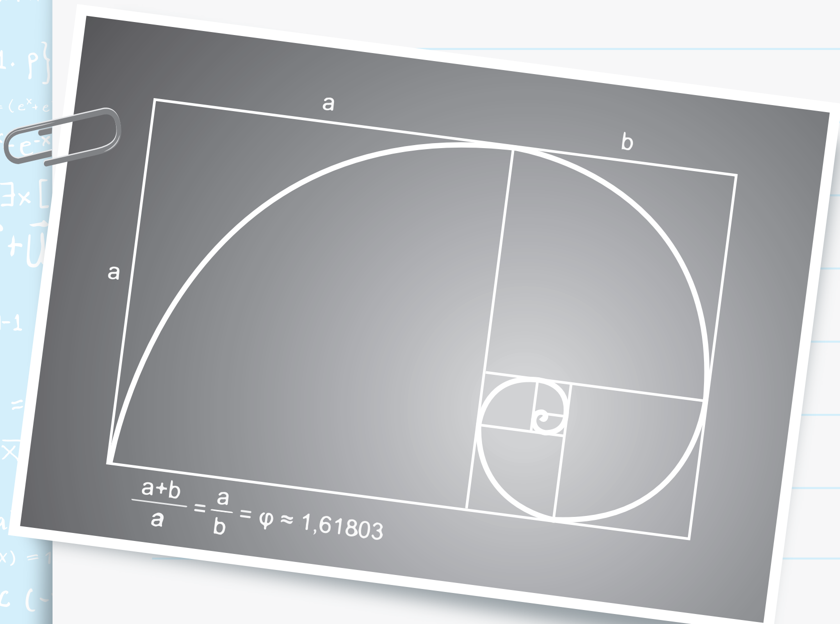
فصل اول

جبر و معادله



- درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
- درس دوم: معادلات درجه دوم
- درس سوم: معادلات گویا و گنگ
- درس چهارم: قدر مطلق و ویژگی‌های آن
- درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی

فصل اول

جبر و معادله

درسنامهٔ ۱

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

یادآوری دنبالهٔ حسابی (عددی)

دنبالهٔ حسابی (عددی) دنباله‌ای از اعداد است که هر جملهٔ آن (غیر از جملهٔ اول)، از افزودن یک مقدار ثابت به جملهٔ قبل از خود به دست می‌آید. به این مقدار ثابت قدرنسبت گفته و آن را با d نمایش می‌دهند. در دنبالهٔ حسابی $\{a_n\}$:

① a_1 جملهٔ اول است.

② اگر قدرنسبت d باشد، آن‌گاه $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1}$ است.

③ جملهٔ nام با داشتن جملهٔ اول (a_1) و قدرنسبت (d)، از رابطهٔ $a_n = a_1 + (n-1)d$ به‌دست می‌آید.

④ جملهٔ nام با داشتن جملهٔ mام (a_m) و قدرنسبت (d)، از رابطهٔ $a_n = a_m + (n-m)d$ به‌دست می‌آید.

⑤ اگر a_p و a_q دو جملهٔ متفاوت از این دنباله باشند، $d = \frac{a_p - a_q}{p-q}$ است.

⑥ بین جملات دنبالهٔ حسابی رابطهٔ خطی حاکم است. به طور کلی هر نمایش به فرم $a_n = \alpha n + \beta$ $(n \in \mathbb{N})$، نمایش یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت α است. برای یافتن هر جمله کافی است به جای n، شمارهٔ جمله را قرار دهیم.

⑦ اگر a جملهٔ اول و b جملهٔ آخر یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d باشد، تعداد جملات از رابطهٔ $n = \frac{b-a}{d} + 1$ به‌دست می‌آید.

⑧ هر گاه بخواهیم بین دو عدد a و b، تعداد m عدد را طوری قرار دهیم که دنبالهٔ اعداد حاصل، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی دهند، قدرنسبت این دنباله از رابطهٔ $d = \frac{b-a}{m+1}$ به‌دست می‌آید.

⑨ اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت‌های d_1 و d_2 باشند، جملات مشترک دو دنباله در صورت وجود، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d می‌سازد که در آن d، کوچک‌ترین مضرب مشترک d_1 و d_2 است.

⑩ اگر سه جملهٔ a، b و c تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، آن‌گاه به b واسطهٔ حسابی (میانگین حسابی) دو جملهٔ a و c گوییم، هرگاه داشته باشیم:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

⑪ در دنبالهٔ حسابی $\{a_n\}$، برای هر p، q، n، m و l طبیعی که در رابطهٔ $p+q = n+m = 2l$ صدق کنند، داریم:

$$a_p + a_q = a_n + a_m = 2a_l$$

مجموع جملات دنبالهٔ حسابی

در دنبالهٔ حسابی $\{a_n\}$، مجموع n جملهٔ اول را با نماد S_n نمایش می‌دهند و تعریف می‌شود:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S_n$$

اگر a_1 جملهٔ اول، a_n جملهٔ nام و d قدرنسبت دنبالهٔ حسابی باشد، مجموع n جملهٔ اول از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad \text{یا} \qquad S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

مثال: در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ هفتم برابر ۳ و جملهٔ دهم برابر ۹ است. مجموع ۲۰ جملهٔ اول را بیابید.

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} a_7 = 3 \\ a_{10} = 9 \end{cases} \Rightarrow d = \dfrac{a_{10} - a_7}{10 - 7} = \dfrac{9-3}{3} = 2 \ (*) \\ a_7 = a_1 + (7-1)d \overset{(*)}{\Longrightarrow} a_1 = a_7 - 6 \times 2 \Rightarrow a_1 = 3 - 12 = -9 \end{array}\right\} \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times (-9) + (20-1) \times 2] = 200$$

نکتهٔ ۱: اگر تعداد جملات یک دنبالهٔ حسابی فرد باشد، داریم:

$$S_n = n \times (\text{جملهٔ وسط}) \qquad \text{یا} \qquad S_{2n-1} = (2n-1) \times a_n$$

مثال: اگر $a_n = ۳n + ۱$ باشد، مجموع ۱۵ جملهٔ اول چه‌قدر است؟

پاسخ:

$$\begin{cases} S_{۱۵} = S_{۲\times۸-۱} = ۱۵\times a_۸ \\ a_n = ۳n+۱ \Rightarrow a_۸ = ۳\times۸+۱ = ۲۵ \end{cases} \Rightarrow S_{۱۵} = ۱۵\times۲۵ = ۳۷۵$$

نکته۲: مجموع n عدد طبیعی متوالی با شروع از یک، برابر است با $\frac{n(n+۱)}{۲}$. به عبارت دیگر:

$$۱+۲+۳+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

نکته۳: مجموع n عدد طبیعی زوج متوالی با شروع از ۲، برابر است با $n(n+۱)$. به عبارت دیگر:

$$۲+۴+۶+\cdots+۲n = n(n+۱)$$

نکته۴: مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی با شروع از یک برابر است با $n^۲$. به عبارت دیگر:

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱) = n^۲$$

نکته۵: مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی به صورت $S_n = \alpha n^۲ + \beta n$ است. برای یافتن جملهٔ عمومی دنبالهٔ حسابی از طریق S_n، کافی است $S_۱$ و $S_۲$ را به دست آوریم. داریم:

$$\begin{cases} S_۱ = a_۱ \quad (*) \\ S_۲ = a_۱ + a_۲ \end{cases} \Rightarrow S_۲ - S_۱ = a_۲ \xRightarrow{(*)} d = a_۲ - a_۱ = S_۲ - ۲S_۱ \quad (**)$$

با داشتن d و $a_۱$، دنبالهٔ حسابی مشخص می‌شود.

نکته۶: روش دیگر برای یافتن جملهٔ عمومی از روی S_n، استفاده از رابطهٔ $a_n = S_n - S_{n-۱}$ است.

نکته۷: حالت کلی نکتهٔ قبل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\underbrace{\underbrace{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{m-۱}}_{S_{m-۱}} + a_m + a_{m+۱} + \cdots + a_n}_{S_n} \Rightarrow a_m + a_{m+۱} + \cdots + a_n = S_n - S_{m-۱}$$

یعنی مجموع جملات mام تا nام یک دنبالهٔ حسابی $(m < n)$، از رابطهٔ $S_n - S_{m-۱}$ به‌دست می‌آید.

مثال: اگر $S_n = ۲n^۲ - ۴n$ باشد، مجموع جملات هفتم تا دهم و جملهٔ عمومی دنباله را تعیین کنید.

پاسخ:

$$\begin{cases} a_۷ + a_۸ + a_۹ + a_{۱۰} = S_{۱۰} - S_{۷-۱} = S_{۱۰} - S_۶ \\ S_n = ۲n^۲ - ۴n \end{cases} \Rightarrow S_{۱۰} - S_۶ = (۲(۱۰)^۲ - ۴(۱۰)) - (۲(۶)^۲ - ۴(۶)) = ۱۱۲$$

برای یافتن جملهٔ عمومی می‌توان یکی از نکات (۵) یا (۶) را به‌کار برد. مثلاً با نکتهٔ (۶) داریم:

$$a_n = S_n - S_{n-۱} = ۲n^۲ - ۴n - (۲(n-۱)^۲ - ۴(n-۱)) \Rightarrow a_n = ۴n - ۶$$

نکته۸: در دنبالهٔ حسابی $\{a_n\}$، اگر به جملهٔ اول a' و به قدرنسبت d' واحد اضافه شود، تغییرات مجموع n جملهٔ اول، از رابطهٔ $\Delta S_n = \frac{n}{۲}[۲a' + (n-۱)d']$ به‌دست می‌آید.

۱- اعداد $\cdots, ۱, x, y, \frac{۵}{۲}$، چهار جملهٔ اول از یک دنبالهٔ حسابی‌اند. مجموع پانزده جملهٔ اول این دنباله کدام است؟ ریاضی خارج ۸۶

۱) ۵۷ ۲) ۶۲/۵ ۳) ۶۷/۵ ۴) ۶۸

۲- اگر مجموع هشت جملهٔ اول از دنبالهٔ حسابی با جملات $a_۱ = ۱ + ۲p$ و $a_۲ = p - ۱$ برابر ۶۰ باشد $(S_۸ = ۶۰)$، قدرنسبت دنباله چه‌قدر است؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) -۹ ۴) -۷

۳- در یک دنبالهٔ حسابی جملات دوم و هشتم قرینه‌اند $(a_۲ + a_۸ = ۰)$ و جملهٔ هفتم برابر چهار است $(a_۷ = ۴)$. مجموع هشت جملهٔ اول چه‌قدر است؟

۱) ۱۸ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) -۸

۴- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع بیست جملهٔ اول سه برابر مجموع دوازده جملهٔ اول آن است. اگر جملهٔ سوم برابر ۶ باشد، جملهٔ دهم کدام است؟ ریاضی داخل ۹۰

۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۳۴ ۴) ۳۸

۵- مجموع هشت جملهٔ اول از دنبالهٔ حسابی برابر ۲ و جملهٔ یازدهم آن برابر ۱۰ می‌باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۶- در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ پنجم برابر ۳ و هر جمله از جملهٔ ماقبل خود به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ کم‌تر است. مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن کدام است؟

۱) ۳۲/۵ ۲) ۲۵ ۳) ۲۷/۵ ۴) ۳۰

۷- در یک دنبالهٔ حسابی، $a_7 = 9 - 2\sqrt{2}$ و $a_{14} = \sqrt{8} - 5$ است. مجموع ۲۰ جملهٔ اول کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) $40\sqrt{2}$ ۳) $20 + 20\sqrt{2}$ ۴) $40 + 40\sqrt{2}$

۸- در یک دنبالهٔ حسابی ده جمله‌ای، مجموع تمام جملات ۲۴۵ و تفاضل جملهٔ اول از جملهٔ آخر برابر ۴۵ است. جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱۲ ۳) ۱۷ ۴) ۳۷

۹- بین دو عدد a و b، ۷ عدد دیگر به گونه‌ای قرار داده‌ایم که تمام اعداد، تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند. اگر عدد وسط ۱۲ باشد، مجموع تمام جمله‌های دنباله کدام است؟

۱) ۱۰۸ ۲) ۸۴ ۳) ۹۶ ۴) ۱۲۰

۱۰- در دنبالهٔ حسابی $\{a_n\}$ اگر $a_2 + a_7 + a_{12} = 15$ باشد، مجموع ۱۳ جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) ۶۵ ۲) ۱۳۰ ۳) ۳۲/۵ ۴) ۲۶۰

۱۱- در یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت، جملهٔ هفتم نصف جملهٔ سوم است. مجموع چند جملهٔ اول از این دنباله برابر صفر است؟ تجربی خارج ۸۸

۱) ۱۸ ۲) ۱۹ ۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۱۲- در یک دنبالهٔ حسابی جملهٔ nام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است. مجموع ۱۵ جملهٔ اول این دنباله کدام است؟ تجربی داخل ۸۹

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۹۰ ۴) ۱۳۵

۱۳- در دنبالهٔ $a_n = n^2 - (n+1)^2$، مجموع ۱۹ جملهٔ اول کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳۹۹- ۳) ۴۰۱ ۴) ۴۰۰-

۱۴- مجموع چند جمله از دنبالهٔ حسابی $2, 6, 10, \dots$، برابر با جملهٔ سیزدهم است؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۸

۱۵- مجموع جملات یک دنبالهٔ حسابی ۲۴ و جملهٔ عمومی آن $a_n = \frac{n}{3} - \frac{1}{6}$ است. تعداد جملات کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

۱۶- مقدار x از معادلهٔ $1 + 5 + 9 + \dots + x = 231$ کدام است؟

۱) ۴۳ ۲) ۳۹ ۳) ۴۱ ۴) ۳۷

۱۷- در دنبالهٔ حسابی $-27, x, -21, \dots$، مجموع جملات منفی کدام است؟

۱) ۱۳۵- ۲) ۱۵۰- ۳) ۷۵- ۴) ۲۷۰-

۱۸- در دنبالهٔ حسابی $a, b, 8, 12, \dots$، مجموع جملاتی که عدد دو رقمی هستند، کدام است؟

۱) ۱۲۰۰ ۲) ۱۳۰۰ ۳) ۱۱۹۶ ۴) ۱۱۸۸

۱۹- حداقل چند جمله از دنبالهٔ حسابی $-1, 2, 5, \dots$ را باید با هم جمع کنیم تا حاصل از ۱۲۵ بیشتر شود؟ هماهنگ کشوری دی ۹۵

۱) ۹ ۲) ۱۴ ۳) ۸ ۴) ۱۱

۲۰- مجموع اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷ کدام است؟ مشابه تمرین کتاب درسی

۱) ۷۳۸ ۲) ۷۲۸ ۳) ۹۲۸ ۴) ۹۳۸

۲۱- مجموع تمام اعداد دو رقمی که رقم یکان آن‌ها ۴ باشد، کدام است؟

۱) ۱۰۰۸ ۲) ۴۸۶ ۳) ۵۰۴ ۴) ۹۷۲

۲۲- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد. $(1), (2,3), (4,5,6), (7,8,9,10), \dots$، مجموع جملات در دستهٔ بیستم، کدام است؟ تجربی خارج ۹۴

۱) ۴۰۱۰ ۲) ۴۰۲۰ ۳) ۴۰۳۰ ۴) ۴۰۴۰

۲۳- اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که آخرین جملهٔ هر دسته، مجذور کامل باشد: $(1), (2,3,4), (5,6,7,8,9), \dots$. مجموع جملات در دستهٔ دهم کدام است؟

۱) ۱۶۹۱ ۲) ۱۷۱۰ ۳) ۱۷۲۹ ۴) ۱۷۴۸

۲۴- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد ...,(۷,۹,۱۱),(۳,۵),(۱) مجموع دو جملهٔ اول و آخر دستهٔ سی‌ام، کدام است؟ تجربی داخل ۹۴

۱) ۱۷۰۰ ۲) ۱۷۵۰ ۳) ۱۸۰۰ ۴) ۱۸۵۰

۲۵- اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شمارهٔ آن دسته باشد، ...,(۷,۹,۱۱),(۳,۵),(۱)، جملهٔ آخر در دستهٔ بیستم کدام است؟ ریاضی خارج ۹۱

۱) ۴۱۵ ۲) ۴۱۹ ۳) ۴۲۱ ۴) ۴۲۳

۲۶- مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی از رابطهٔ $S_n = n^۲ + ۲n$ به‌دست می‌آید. مجموع جملات هفتم و هشتم و نهم برابر کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۵۱ ۳) ۳۶ ۴) ۷۶

۲۷- مجموع n جملهٔ اول از یک دنبالهٔ حسابی به صورت $S_n = \frac{n(n-۳)}{۴}$ است. مجموع جملاتی از این دنباله که از جملهٔ بیست و پنجم شروع و به جملهٔ سی و پنجم ختم شوند، کدام است؟ تجربی خارج ۸۹

۱) ۱۳۲ ۲) ۱۴۵ ۳) ۱۴۸ ۴) ۱۵۴

۲۸- مجموع n جملهٔ اول از یک دنبالهٔ حسابی به‌صورت $S_n = \frac{n(n-۱۵)}{۶}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جملهٔ هفتم و ختم به جملهٔ هجدهم، کدام است؟ ریاضی خارج ۹۰

۱) ۹ ۲) $\frac{۲۹}{۳}$ ۳) $\frac{۴۹}{۳}$ ۴) ۱۸

۲۹- اگر S_n مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی و سه جملهٔ اول دنبالهٔ S_n به صورت $۳, \frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲}$ باشند، جملهٔ چهارم این دنباله $(S_۴)$ کدام است؟ انسانی داخل ۸۵

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{۹}{۲}$ ۴) ۵

۳۰- اختلاف مجموع n عدد طبیعی فرد متوالی (با شروع از ۱) و مجموع $n+۱$ عدد طبیعی فرد متوالی (با شروع از ۱)، برابر ۲۷ است. n کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

۳۱- اگر S_n مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $\{a_n\}$ باشد و داشته باشیم $S_۶ = S_{۱۰} = ۱۲$، مجموع شانزده جملهٔ اول دنبالهٔ a_n کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) صفر ۳) ۲۴ ۴) ۹۶

۳۲- در یک دنبالهٔ حسابی غیرثابت $\frac{S_۷}{S_۳} = \frac{۴۹}{۹}$ است. مقدار $\frac{a_۷}{a_۳}$ کدام است؟ (a_n جملهٔ عمومی و S_n مجموع n جملهٔ اول دنباله است.)

۱) $\frac{۱۵}{۷}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۵}$

۳۳- در یک دنبالهٔ حسابی $a_۱ = ۳ + \sqrt{۲}$ و $a_۲ = ۵ + \sqrt{۲}$. مجموع چهار جملهٔ چهارم این دنباله چه‌قدر از مجموع چهار جملهٔ دوم آن بیشتر است؟

۱) ۸ ۲) ۶۴ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۳۴- ده عدد، جملات متوالی از دنبالهٔ حسابی‌اند. مجموع ۵ جملهٔ اول ۵۵ و مجموع ۵ جملهٔ آخر ۱۳۰ می‌باشد. کوچک‌ترین این اعداد کدام است؟ انسانی داخل ۸۷

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۵- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع چهار جملهٔ اول ۱۵ و مجموع پنج جملهٔ بعدی ۳۰ می‌باشد. جملهٔ یازدهم این دنباله کدام است؟ ریاضی خارج ۸۵

۱) ۷/۵ ۲) ۸ ۳) ۸/۵ ۴) ۹

۳۶- در یک دنبالهٔ حسابی متناهی، مجموع سه جملهٔ اول ۱۲، مجموع سه جملهٔ آخر ۶۶ و مجموع تمام جملات ۱۱۷ می‌باشد. این دنباله چند جمله دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۸

۳۷- در یک دنبالهٔ حسابی مجموع جملات هفتم تا دوازدهم از مجموع سه جملهٔ اول دنباله ۳۶ واحد بیشتر است. جملهٔ هفدهم این دنباله کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

۳۸- در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع ۵ جملهٔ اول آن، $\frac{۱}{۳}$ مجموع پنج جملهٔ بعدی است. جملهٔ دوم چند برابر جملهٔ اول است؟ تجربی خارج ۹۱

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۹- مجموع پنج عدد که جملات متوالی از دنبالهٔ حسابی‌اند برابر ۱۰۵ و مجموع سه عدد بزرگ‌تر، ۶ برابر مجموع دو عدد کوچک‌تر است. بزرگ‌ترین این اعداد کدام است؟ انسانی داخل ۸۹

۱) ۳۸ ۲) ۳۹ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

۴۰- در بیست جملهٔ اول از دنبالهٔ حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می‌باشد. جملهٔ اول کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ تجربی خارج ۸۵

۴۱- مجموع اعداد طبیعی زوج، شروع از ۵۰ و ختم به ۱۲۰، چه تعداد بیشتر از مجموع اعداد طبیعی فرد، شروع از ۵۱ و ختم به ۱۱۹ است؟

۱) ۵۵ ۲) ۶۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۵

۴۲- در یک دنبالهٔ حسابی با ۲۰ جمله و با قدرنسبت d و جملهٔ اول ۳-، جملات با شمارهٔ زوج را حذف می‌کنیم. اگر نسبت مجموع جملات دنبالهٔ جدید به مجموع جملات دنبالهٔ اصلی برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد، جملهٔ بیست و پنجم دنباله، کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{۲۱}{۸}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) ۴

۴۳- در یک دنبالهٔ حسابی اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جملهٔ اول چه‌قدر افزوده خواهد شد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

۴۴- در یک دنبالهٔ حسابی اگر به جملهٔ اول ۳ واحد اضافه کنیم و از قدرنسبت ۲ واحد کم کنیم، در مجموع بیست جملهٔ اول چه تغییری صورت می‌گیرد؟

۱) ۳۲۰ واحد اضافه می‌شود. ۲) ۱۶۰ واحد اضافه می‌شود. ۳) ۳۲۰ واحد کم می‌شود. ۴) ۱۶۰ واحد کم می‌شود.

۴۵- مجموع اولین بیست جملهٔ مشترک دنبالهٔ حسابی $-۱,۵,۱۱,...$ و دنبالهٔ حسابی $۱,۵,۹,...$ کدام است؟

۱) ۲۳۸۰ ۲) ۲۵۰۰ ۳) ۲۶۰۰ ۴) ۲۲۸۰

۴۶- یک شرکت تولیدی تا پایان سال اول ۸۰۰ واحد کالا تولید می‌کند و درنظر دارد که پس از گذشت هر یک سال، مرتباً ۹۰ واحد کالا به تولید سال قبل بیافزاید. پس از گذشت ۴ سال جمعاً چند واحد کالا می‌تواند تولید کند؟

۱) ۳۶۸۰ ۲) ۳۷۴۰ ۳) ۳۷۶۰ ۴) ۳۸۶۰

۴۷- سعید می‌خواهد یک لپ‌تاپ گاج به قیمت ۴۰۰۰۰۰ تومان خریداری کند. قرار شد پدر سعید به صورت ماهانه به سعید پول بدهد، به این ترتیب که ماه اول ۱۰۰۰۰ تومان و هر ماه ۲۰۰۰ تومان بیشتر از ماه قبل بگیرد. پس از چند ماه سعید می‌تواند پول مورد نیاز برای خرید لپ‌تاپ را داشته باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۰ ۴) ۱۸

۴۸- کوهنوردی برای صعود به قله، پس از یک ساعت، به ارتفاع ۸۰۰ متری می‌رسد و در هر ساعت متوالی بعدی، ۲۵ متر کم‌تر از ارتفاع قبلی صعود می‌کند. در چند ساعت، این کوهنورد می‌تواند به ارتفاع ۵۷۰۰ متری صعود کند؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۰

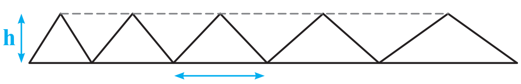
۴۹- اندازهٔ پله‌های یک نردبان به‌طور یکنواخت از پایین به بالا، از ۴۵ سانتی‌متر به ۳۰ سانتی‌متر می‌رسد. اگر مجموع طول پله‌ها ۴/۵ متر باشد، این نردبان چند پله دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۵۰- کوچک‌ترین زاویهٔ یک n ضلعی محدب برابر ۱۴۲° و بزرگ‌ترین آن ۱۵۸° است. اگر زوایای این چندضلعی تشکیل یک دنبالهٔ حسابی بدهند، آن‌گاه n کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۹

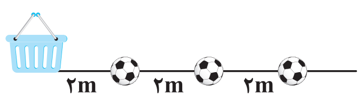
۵۱- ۵ مثلث داریم که هم‌ارتفاع هستند و اندازهٔ قاعده‌های آن‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی می‌دهند. اگر مجموع مساحت‌های این مثلث‌ها برابر ۱۰۵ و اندازهٔ قاعدهٔ مثلث میانی برابر ۷/۵ باشد، اندازه ارتفاع این مثلث‌ها کدام است؟



۱) ۴ ۲) ۵/۶ ۳) ۴/۸ ۴) ۶

۵۲- تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصلهٔ ۲ متر از هم قرار دارند. فاصلهٔ توپ اول تا سبد ۲ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده، هر توپ را برداشته به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. اگر این دونده در مجموع ۴۸۰ متر دویده باشد، او چند توپ در سبد انداخته است؟ مشابه مثال کتاب درسی

۱) ۱۶ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۱۷



درسنامهٔ ۲

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

یادآوری دنبالهٔ هندسی

دنبالهٔ هندسی دنباله‌ای از اعداد است که در آن هرجمله (غیر از جملهٔ اول) از ضرب جملهٔ قبلی در یک عدد ثابت مخالف صفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت می‌گوییم و با q نمایش می‌دهیم. در دنبالهٔ هندسی $\{a_n\}$:

① a_1 جملهٔ اول است.

② اگر قدرنسبت q باشد، آن‌گاه $q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}$ است. $(q\neq 0)$

③ جملهٔ nام با داشتن جملهٔ اول (a_1) و قدرنسبت (q)، از رابطهٔ $a_n=a_1q^{n-1}$ به‌دست می‌آید.

④ جملهٔ nام با داشتن جملهٔ mام (a_m) و قدرنسبت (q)، از رابطهٔ $a_n=a_mq^{n-m}$ به‌دست می‌آید.

⑤ اگر a_p و a_q دو جملهٔ متفاوت از این دنباله باشند، $q^{p-q}=\frac{a_p}{a_q}$ است.

⑥ بین جملات دنبالهٔ هندسی رابطهٔ نمایی حاکم است. به‌طورکلی هر نمایش به فرم $a_n=pr^{\alpha n+\beta}$، نمایش یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت r^α است. برای یافتن هر جمله کافی است به جای n، شمارهٔ جمله را قرار دهیم.

⑦ اگر تمام جملات یک دنباله برابر باشند (مانند $a,a,a,\cdots$)، آن‌گاه یک دنباله داریم که هم حسابی (با قدرنسبت $d=0$) و هم هندسی (با قدرنسبت $q=1$) است.

⑧ هرگاه بخواهیم بین دو عدد a و b، تعداد m عدد را طوری قرار دهیم که دنبالهٔ اعداد حاصل، تشکیل یک دنبالهٔ هندسی دهند، قدرنسبت این دنباله از رابطهٔ $q^{m+1}=\frac{b}{a}$ به‌دست می‌آید.

⑨ در دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q و جملهٔ اول $a_1\neq 0$، اگر $q>1$ باشد، آن‌گاه جملات دنباله مرتباً افزایش می‌یابند. اگر $0<q<1$ باشد، آن‌گاه جملات دنباله مرتباً کاهش می‌یابند. اگر $q<0$ باشد، جملات دنباله، روند افزایشی یا کاهشی مشخصی ندارند.

⑩ اگر سه جملهٔ a، b و c تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، آن‌گاه به b واسطهٔ هندسی دو جملهٔ a و c گوییم، هرگاه داشته باشیم:

$$b^2=ac$$

⑪ در دنبالهٔ هندسی $\{a_n\}$، برای هر p، q، n، m و l طبیعی که در رابطهٔ $p+q=n+m=2l$ صدق کنند، داریم:

$$a_p\times a_q=a_n\times a_m=(a_l)^2$$

مجموع جملات دنبالهٔ هندسی

در دنبالهٔ هندسی $\{a_n\}$، مجموع n جملهٔ اول را با نماد S_n نمایش می‌دهند و تعریف می‌شود:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$$

اگر a_1 جملهٔ اول و a_{n+1} جملهٔ $(n+1)$ام و q قدرنسبت دنبالهٔ هندسی باشند $(q\neq 1)$، مجموع n جملهٔ اول از رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \qquad \text{یا} \qquad S_n=\frac{a_1-a_{n+1}}{1-q}=\frac{a_{n+1}-a_1}{q-1}$$

مثال: در یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت منفی، جملهٔ سوم برابر ۱۵ و جملهٔ پنجم برابر ۶۰ است. مجموع ۴ جملهٔ اول را بیابید.

پاسخ:

$$\begin{cases}a_3=15\\a_5=60\end{cases}\Rightarrow q^{5-3}=\frac{60}{15}=4\Rightarrow q^2=4\Rightarrow q=\pm 2\xrightarrow{q<0}q=-2\quad(*)$$

$$a_3=a_1q^2\xrightarrow{(*)}15=a_1(-2)^2\Rightarrow a_1=\frac{15}{4}$$

روش اول:

$$S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}\xrightarrow[q=-2]{a_1=\frac{15}{4}}\frac{\frac{15}{4}(1-(-2)^4)}{1-(-2)}=\frac{\frac{15}{4}(-15)}{3}=-\frac{75}{4}$$

روش دوم:

$$S_4=\frac{a_1-a_5}{1-q}=\frac{\frac{15}{4}-60}{1-(-2)}=-\frac{75}{4}$$

نکته۱: اگر در دنبالهٔ هندسی $\{a_n\}$، مجموع n جملهٔ اول را با نماد S_n نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=q^n+1\Rightarrow\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}=q^n$$

مثال: در یک دنبالهٔ هندسی مجموع هشت جملهٔ اول، $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جملهٔ اول است. جملهٔ هفتم چند برابر جملهٔ اول است؟

پاسخ:

$$\frac{S_8}{S_4}=\frac{S_{2\times4}}{S_4}=q^4+1\xrightarrow{S_8=\frac{5}{4}S_4}q^4+1=\frac{5}{4}\Rightarrow q^4=\frac{1}{4}\Rightarrow q=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\quad(*)$$

$$\frac{a_7}{a_1}=q^{7-1}=q^6\overset{(*)}{=\!=}(\pm\frac{\sqrt{2}}{2})^6=\frac{1}{8}$$

نکته۲: برای یافتن جملهٔ عمومی از روی S_n، می‌توان از رابطهٔ $a_n=S_n-S_{n-1}$ استفاده کرد. همچنین داریم $a_1=S_1$ و $a_2=S_2-S_1$، در نتیجه $q=\frac{S_2-S_1}{S_1}=\frac{S_2}{S_1}-1$.

نکته۳: مجموع جملات mام تا nام $(m<n)$، برابر است با:

$$a_m+a_{m+1}+\cdots+a_n=S_n-S_{m-1}$$

۵۳- مجموع شش جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی $\cdots,\frac{1}{2},x,2$ با جملات غیرکاهشی، کدام است؟ ریاضی داخل ۸۶

۱) $\frac{41}{32}$ ۲) $\frac{21}{16}$ ۳) $\frac{11}{8}$ ۴) $\frac{23}{16}$

۵۴- بین دو عدد ۲ و $16\sqrt{2}$، شش عدد چنان درج شده‌اند که هشت عدد حاصل، دنبالهٔ هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟ ریاضی خارج ۸۸

۱) $30(2+\sqrt{2})$ ۲) $48\sqrt{2}$ ۳) $30(\sqrt{2}+1)$ ۴) $36(\sqrt{2}+1)$

۵۵- بین دو عدد ۳۲۴ و ۴، سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنبالهٔ هندسی دهند، مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟ ریاضی خارج ۹۱

۱) ۴۸۲ ۲) ۴۸۴ ۳) ۴۸۶ ۴) ۴۸۸

۵۶- در یک دنبالهٔ هندسی به‌صورت $4,a,9,b,\cdots$ که جملات مرتباً افزایش می‌یابند، مجموع شش جملهٔ اول کدام است؟ ریاضی خارج ۸۹

۱) $81\frac{3}{8}$ ۲) $81\frac{7}{8}$ ۳) $82\frac{3}{8}$ ۴) $83\frac{1}{8}$

۵۷- به ازای یک مقدار x، اعداد x^2-2، $2x$ و x^2+4، به ترتیب سه جملهٔ اول از یک دنبالهٔ هندسی هستند که جملات آن مرتباً کاهش می‌یابند. مجموع هفت جملهٔ اول این دنباله، کدام است؟ تجربی داخل ۹۳

۱) $\frac{117}{16}$ ۲) $\frac{125}{16}$ ۳) $\frac{63}{4}$ ۴) $\frac{127}{8}$

۵۸- در یک دنبالهٔ هندسی با جملات افزایشی، تفاضل جملات اول و یازدهم برابر ۴۰ و مجموع ۱۰ جملهٔ اول آن برابر ۲۰ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۹- حاصل $A=(1+x+x^2+\cdots+x^8)(1-x+x^2-\cdots+x^8)$ به ازای $x=\sqrt{2}$ کدام است؟

۱) ۵۰۷ ۲) ۵۱۱ ۳) ۵۱۲ ۴) ۵۱۶

۶۰- حاصل عبارت $\frac{t^{11}+t^{10}+t^9+\cdots+t+1}{t^9+t^6+t^3+1}$ به ازای $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ کدام است؟ ریاضی داخل ۹۳

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶۱- حاصل عبارت $\frac{t^8-t^7+t^6-\cdots-t+1}{t^6-t^3+1}$ به ازای $t=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ کدام است؟ ریاضی خارج ۹۳

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۲- عبارت $x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+\cdots+y^6$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{x^7-y^7}{x-y}$ ۲) $\frac{x^7-y^7}{x+y}$ ۳) $\frac{x^7+y^7}{x-y}$ ۴) $\frac{x^7+y^7}{x+y}$

۶۳- مجموع چند جملهٔ دنبالهٔ هندسی $\dots,24,-12,6$، برابر ۱۰۲۶ است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۶۴- در یک دنبالهٔ هندسی، هر جمله $\frac{2}{3}$ جملهٔ قبلی آن است. اگر مجموع پنج جملهٔ اول آن $\frac{211}{27}$ باشد، جملهٔ اول کدام است؟ انسانی خارج ۹۰

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۵- در یک دنبالهٔ هندسی، جملهٔ اول دو واحد کم‌تر از جملهٔ پنجم است. اگر مجموع چهار جملهٔ اول دنباله مساوی ۶ باشد، قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۶۶- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع ۱۹ جملهٔ اول ۶۴۰ واحد از مجموع ۱۰ جملهٔ اول همان دنباله بیشتر است. اگر قدرنسبت دنباله ۲ باشد، آن‌گاه مجموع ۹ جملهٔ اول دنباله کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{5}{8}$

۶۷- در یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q = 2$، مجموع شش جملهٔ اول چند برابر مجموع سه جملهٔ اول است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۶۸- در یک دنبالهٔ هندسی مجموع ده جملهٔ اول $(4\sqrt{2}+1)$ برابر مجموع ۵ جملهٔ اول است. در این دنباله مجموع ۸ جملهٔ اول چند برابر مجموع چهار جملهٔ اول است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۱۷

۶۹- در دنبالهٔ هندسی $\dots,4,2,1$، مجموع چهارده جملهٔ اول چند برابر مجموع هفت جملهٔ اول آن است؟ تجربی خارج ۹۰

۱) ۶۵ ۲) ۶۳ ۳) ۱۲۷ ۴) ۱۲۹

۷۰- در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اول ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول ۱۵۳ می‌باشد. جملهٔ اول چند برابر جملهٔ پنجم است؟

۱) $\frac{81}{16}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶ ریاضی داخل ۸۹

۷۱- در دنبالهٔ هندسی $\dots,\frac{1}{2},2$، مجموع پنج جملهٔ اول چند برابر مجموع پنج جملهٔ دوم است؟

۱) 2^{10} ۲) 2^{2} ۳) ۲ ۴) 2^{5}

۷۲- کارفرمایی به یک کارگر پیشنهاد کرد که دستمزد روز اول را ۳۲۰ تومان بپردازد و تا پایان ۶ روز کاری هفته، هر روز دستمزد او را ۱/۵ برابر دستمزد روز قبل پرداخت کند. مجموع دستمزدهای ۶ روز اول هفته کدام است؟

۱) ۶۶۵۰ ۲) ۶۷۵۰ ۳) ۶۸۵۰ ۴) ۶۹۵۰

۷۳- طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم، سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحلهٔ قبل را رنگ می‌زنیم. حداقل پس از چند مرحله بیش از ۹۰ درصد مربع رنگ شده است؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵ مشابه تمرین کتاب درسی

۷۴- برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد؟ مشابه مثال کتاب درسی

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۷

۷۵- وسط اضلاع مربعی را به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدیدی به وجود آید. دوباره وسط اضلاع مربع جدید را به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدید دیگری حاصل شود. حداقل چند مرحله این کار را انجام دهیم تا مجموع مساحت‌های مربع‌های به وجود آمده بیش از ۹۹ درصد مساحت مربع اولیه شود؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

درسنامهٔ ۳

سه اتحاد مهم

① اگر $x, y \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$، آن‌گاه:
$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

② اگر $x, y \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ عددی فرد باشد، آن‌گاه:
$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

③ اگر $x, y \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$ عددی زوج باشد، آن‌گاه:
$$x^n - y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} - y^{n-1})$$

حالات خاص

① اگر n عددی طبیعی باشد، داریم:
$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+1)$$

② اگر n عددی فرد باشد، داریم:
$$x^n+1=(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\dots+1)$$

مثال: به کمک اتحادها، عبارت $A=\dfrac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1}$ را ساده کنید. هماهنگ کشوری دی ۹۱

پاسخ:
$$A=\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=x^4-x^3+x^2-x+1$$

۷۶- حاصل عبارت $\dfrac{6(a^2+2)}{a^3-1}-\dfrac{6}{a^2+a+1}-\dfrac{a+5}{a-1}$ کدام است؟ هماهنگ کشوری دی ۹۴

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $a+1$ ۴) $a-1$

۷۷- حاصل عبارت $A=\dfrac{(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x)}{x^{10}-1}$ به ازای $x=2$ کدام است؟

۱) $\dfrac{1}{32}$ ۲) $\dfrac{1}{31}$ ۳) $\dfrac{1}{30}$ ۴) $\dfrac{1}{33}$

۷۸- کدام‌یک از اتحادهای زیر، درست نیست؟

۱) $a^5-1=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)$
۲) $a^5+1=(a+1)(a^4-a^3+a^2-a+1)$
۳) $a^6-1=(a-1)(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)$
۴) $a^6+1=(a+1)(a^5-a^4+a^3-a^2+a-1)$

۷۹- عبارت $(x^3-2x+3)^3-(x^3-x^2+2)^3$ بر کدام‌یک از عبارات زیر بخش‌پذیر است؟

۱) $(x-1)^2$ ۲) x^2-1 ۳) x^2+1 ۴) $(x+1)^2$

۸۰- در تجزیهٔ عبارت $A=x^9-x^3y^3$ کدام عامل وجود ندارد؟

۱) x^3 ۲) x^2-y ۳) $x^4-x^2y+y^2$ ۴) $x^4+x^2y+y^2$

درسنامهٔ ۴

معادلهٔ درجه دوم

معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ را با شرط $a\neq 0$ معادلهٔ درجه دوم می‌نامند. برای تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم لازم است که ابتدا Δ (دلتا) را به‌دست آوریم. بر اساس Δیِ به‌دست آمده برای معادلهٔ درجه دوم سه حالت داریم:

① اگر $\Delta=b^2-4ac<0$ باشد، آن‌گاه معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد. مانند $x^2-3x+4=0$ $(\Delta=(-3)^2-4\times1\times4<0)$

② اگر $\Delta=b^2-4ac=0$ باشد، آن‌گاه معادله، یک ریشهٔ حقیقی مضاعف (یا دو ریشهٔ حقیقی یکسان یا تکراری) دارد که $x=-\dfrac{b}{2a}$ این ریشه خواهد بود. مانند معادلهٔ $9x^2-6x+1=0$ $(\Delta=(-6)^2-4\times9\times1=0)$ که ریشهٔ آن $x=-\dfrac{-6}{2\times9}=\dfrac{1}{3}$ است.

③ اگر $\Delta=b^2-4ac>0$ باشد، آن‌گاه معادله، دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد. ریشه‌های معادلهٔ داده شده در این حالت $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ می‌باشند. مانند $x^2-4x+3=0$ $(\Delta=(-4)^2-4\times1\times3=4>0)$ که ریشه‌های آن $x_1=\dfrac{+4+\sqrt{4}}{2\times1}=3$ و $x_2=\dfrac{+4-\sqrt{4}}{2\times1}=1$ هستند.

تذکر: اگر b عددی زوج باشد، به جای Δ می‌توان از Δ' استفاده کرد، تا با اعداد کوچک‌تری سروکار داشته باشیم. می‌توان نوشت:
$$b'=\frac{b}{2}\ ,\ \Delta'=(b')^2-ac\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta>0$ دو ریشهٔ متمایز دارد. اگر x_1 و x_2 دو ریشهٔ معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، روابط زیر بین ریشه‌های معادله حاکم است:

الف) $S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$
ب) $P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}$
ج) $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{S^2-4P}$

تذکر: اکثر حالات را می‌توان به رابطه‌ای بین S و P تبدیل کرد. به عنوان مثال داریم:

$$x_1+x_2=S\ ,\ x_1x_2=P$$
$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P$$
$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3PS$$
$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{(x_1+x_2)+2\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}$$
$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\sqrt{(x_1+x_2)-2\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{S-2\sqrt{P}}$$

واضح است که در دو رابطهٔ آخر باید x_1 و x_2 (یا به عبارت دیگر S و P) نامنفی باشند.

مثال: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x+1=0$ باشند، موارد زیر را به‌دست آورید.

الف) $x_1+x_2=-(\frac{-3}{1})=3=S$

ب) $x_1x_2=\frac{1}{1}=1=P$

ج) $x_1^2+x_2^2=S^2-2P=3^2-2\times1=7$

د) $x_1^3+x_2^3=S^3-3SP=3^3-3\times3\times1=18$

هـ) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{S^2-2P}{P}=\frac{7}{1}=7$

و) $\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|=\sqrt{S-2\sqrt{P}}=\sqrt{3-2\sqrt{1}}=1$

نکاتی دربارهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $(ax^2+bx+c=0)$

۱) اگر $\frac{c}{a}<0$ باشد، در این صورت معادله حتماً دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد و قطعاً دلتا مثبت است.

۲) اگر $\frac{c}{a}>0$ باشد، در صورت وجود دو ریشهٔ متمایز (اگر شرط $\Delta>0$ برقرار بود)، این ریشه‌ها هم‌علامت‌اند. در این حالت، ریشه‌های معادله، هم‌علامت $-\frac{b}{a}$ هستند.

۳) اگر $c=0$ باشد، در این صورت $x=0$ یک ریشهٔ معادله است و ریشهٔ دیگر $x=-\frac{b}{a}$ می‌باشد.

۴) اگر $a+b+c=0$ باشد، $x=1$ یک ریشهٔ معادله و $x=\frac{c}{a}$ ریشهٔ دیگر آن است.

۵) اگر $a+c=b$ باشد، $x=-1$ یک ریشهٔ معادله و $x=-\frac{c}{a}$ ریشهٔ دیگر آن است.

۶) اگر $b=0$ و $\frac{c}{a}<0$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ قرینهٔ هم است.

۷) اگر $a=c$ و $\Delta>0$ باشد، معادله دارای دو ریشهٔ معکوس هم است.

تذکر: در حالت فوق اگر $\left|\frac{b}{a}\right|>2$ باشد، آن‌گاه شرط $\Delta>0$ برقرار می‌شود.

۸۱- مجموع مجذورات سه عدد طبیعی متوالی ۷۷ است. کوچک‌ترین عدد بین این سه عدد کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۸۲- در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول سه ضلع x، $x+7$ و $x+8$ است. طول ارتفاع وارد بر وتر کدام است؟

۱) $\frac{30}{13}$ ۲) $\frac{120}{13}$ ۳) $\frac{60}{13}$ ۴) $\frac{13}{2}$

۸۳- در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع a، $a+2$ و $a+4$، مساحت کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۶

۸۴- اگر سن آیدین ۵۱ سال دیگر مجذور سن ۵ سال قبلش باشد، چند سال دیگر سن آیدین مجذور سن ۷ سال قبلش است؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۳ ۳) ۱۲ ۴) ۳۶

۸۵- اگر به اعداد ۱۲ و ۱۸، a واحد اضافه گردد، به حاصل‌ضرب آن دو عدد $2a^2$ واحد اضافه می‌شود. حاصل $\sqrt{a^2+6a+9}$ کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۱ ۳) ۳۲ ۴) ۳۳

۸۶- معادلهٔ $(x-1)(x-3)+2+k^2=0$ چه وضعی دارد؟

۱) دو ریشهٔ مثبت دارد. ۲) دو ریشهٔ منفی دارد. ۳) دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد. ۴) ریشهٔ حقیقی ندارد.

۸۷- اگر سه عدد غیر صفر a، b و c به ترتیب سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، در این‌صورت معادلهٔ درجه دوم $9ax^2+6bx+c=0$ دارای ....

۱) ریشهٔ مضاعف است. ۲) دو ریشهٔ متمایز مثبت است. ۳) دو ریشهٔ متمایز منفی است. ۴) ریشهٔ حقیقی نیست.

۸۸- به ازای کدام مقادیر a، معادلهٔ درجه دوم $2x^2+ax+a-\frac{3}{2}=0$، دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است؟

۱) $a>6$ یا $a<2$ ۲) $a>4$ یا $a<3$ ۳) $2<a<6$ ۴) $3<a<4$

۸۹- به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجه دوم $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0$، فاقد ریشهٔ حقیقی است؟ تجربی خارج ۸۹

۱) $-3<m<5$ ۲) $-3<m<4$ ۳) $-2<m<4$ ۴) $-1<m<5$

۹۰- منحنی به معادلهٔ $y=(2x+1)(x+8)$ با خطوط $y=mx$ نقطهٔ مشترکی <u>ندارد</u>. مجموعه مقادیر m کدام است؟ ریاضی داخل ۸۸

۱) $9<m<25$ ۲) $15<m<23$ ۳) $7<m<15$ ۴) $5<m<13$

۹۱- به ازای کدام مقادیر m، خط به معادلهٔ $y=2x-4$ بر منحنی به معادلهٔ $y=(m+3)x^2+mx$، مماس است؟ ریاضی داخل ۹۰

۱) $-2, 18$ ۲) $2, 22$ ۳) $-2, 22$ ۴) $4, 11$

۹۲- به ازای کدام مقدار a، نمودار دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=ax^2+4x$، بر هم مماس‌اند؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) -1 ۲) -3 ۳) -2 ۴) -4

۹۳- به ازای کدام مقدار a، خط به معادلهٔ $y=-3x+2$ بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x^2+a}{x-2}$ مماس است؟ ریاضی خارج ۹۵

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) 2

۹۴- منحنی به معادلهٔ $y=(x-1)(x^2-ax+a)$، محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. حدود a کدام است؟

۱) $-4<a<0$ ۲) $0<a<2$ ۳) $0<a<4$ ۴) $a>4$

۹۵- اگر معادلهٔ $3x^2-2(a+b)x+3(a-b)=0$، دارای ریشهٔ مضاعف مساوی ۲ باشد، آن‌گاه $a+b$ کدام است؟

۱) -3 ۲) 3 ۳) -6 ۴) 6

۹۶- اگر معادلهٔ درجه دوم $x^2-4x+k=0$، دارای دو ریشهٔ حقیقی x' و x'' باشد، کدام درست است؟

۱) $x'x''>4$ ۲) $x'x''>-4$ ۳) $x'x''<-4$ ۴) $x'x''<4$

۹۷- در معادلهٔ درجه دوم $x^2+3x-1=0$، حاصل $x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3$ کدام است؟ (x_1 و x_2 جواب‌های این معادله هستند.)

۱) 9 ۲) -9 ۳) -27 ۴) 27

۹۸- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-bx+1=0$ برابر $2-\sqrt{5}$ باشد، ریشهٔ دیگر آن کدام است؟

۱) $\sqrt{5}-3$ ۲) $2-\sqrt{5}$ ۳) $\sqrt{5}+2$ ۴) $3-\sqrt{5}$

۹۹- در معادلهٔ درجه دوم $4x^2+kx=21$ اگر مجموع ریشه‌ها برابر -2 باشد، ریشهٔ بزرگ‌تر کدام است؟ انسانی خارج ۸۷

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) $\frac{7}{2}$

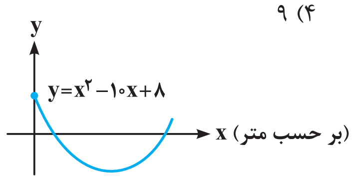
۱۰۰- به ازای کدام مقدار m، عدد $\frac{1}{8}$ واسطهٔ حسابی بین دو ریشهٔ معادلهٔ $(m^2-4)x^2-3x+m=0$ است؟

۱) 3 ۲) -3 ۳) 4 ۴) -4

۱۰۱- اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-mx+2=0$ باشند و اعداد $x_1x_2, x_1+x_2, 4$ تشکیل دنبالهٔ حسابی دهند، آن‌گاه مقدار m کدام است؟

۱) 4 ۲) 3 ۳) 6 ۴) 9

۱۰۲- منحنی مقابل، مسیر شناگری را از لحظه‌ای که تختهٔ شیرجه را ترک می‌کند تا زمانی‌که دوباره به سطح آب برمی‌گردد، نشان می‌دهد. این مسیر از معادلهٔ $y=x^2-10x+8$ پیروی می‌کند. این شناگر پس از رفتن به زیر آب، چند متر جلوتر از آب خارج می‌شود؟



۱) 7 ۲) $\sqrt{68}$ ۳) 10 ۴) 17

۱۰۳- به ازای کدام مقدار k در معادلهٔ درجه دوم $2x^2-x+k=0$، بین ریشه‌ها رابطهٔ $x_1+2x_2=3$ برقرار است؟

۱) -12 ۲) -10 ۳) 8 ۴) 6

۱۰۴- در معادلهٔ درجه دوم $2x^2+ax+9=0$، یک ریشه دو برابر ریشهٔ دیگر است. مجموع دو ریشهٔ مثبت کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

۱۰۵- در معادلهٔ $3x^2-15x+m=0$، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشهٔ دیگر بیشتر باشد، m کدام است؟

۱) $\frac{59}{5}$ ۲) $\frac{63}{5}$ ۳) $\frac{59}{4}$ ۴) $\frac{63}{4}$

۱۰۶- در معادلهٔ $3x^2-17x+m=0$، یک ریشه از سه برابر ریشهٔ دیگر ۳ واحد بیشتر است. m کدام است؟ ریاضی داخل ۸۷

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۰۷- در معادلهٔ $x^2-8x+m=0$ یک ریشه از نصف ریشهٔ دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ ریاضی خارج ۹۱

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۱۰۸- به ازای کدام مقدار m، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+5+m=0$ مجذور دیگری است؟

۱) ۳۲ ۲) ۲ ۳) ۳۲- ۴) ۳-

۱۰۹- به ازای کدام مقدار m در معادلهٔ $(m+1)x^2-3x+m=0$، یکی از ریشه‌ها دو برابر ریشهٔ دیگر است؟

۱) $3,-2$ ۲) $-3,2$ ۳) $2,-1$ ۴) $-2,1$

۱۱۰- اگر جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2-8x+2k=1$، دو عدد صحیح فرد متوالی باشند، k کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶/۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۸

۱۱۱- در معادلهٔ $ax^2+2x+c=0$ مجموع دو ریشه «عددی مثبت» و یکی از ریشه‌ها برابر a است. ریشهٔ دیگر که برابر c می‌باشد، چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۳- ۳) ۱- ۴) ۳

۱۱۲- کدام‌یک از معادلات زیر به ازای جمیع مقادیر k، دو ریشهٔ حقیقی منفی دارد؟

۱) $x^2+kx+k^2+1=0$ ۲) $x^2+(k+1)x-k-2=0$ ۳) $x^2-(k^2+1)x+k^2=0$ ۴) $x^2+(k^2+3)x+k^2+2=0$

۱۱۳- اگر منحنی به معادلهٔ $y=2x^2-4x+m-3$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های مثبت قطع کند، آن‌گاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ ریاضی داخل ۸۷

۱) $m>3$ ۲) $3<m<4$ ۳) $3<m<5$ ۴) $4<m<5$

۱۱۴- به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x)=ax^2+(a+3)x-1$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ ریاضی خارج ۹۲

۱) $a<-9$ ۲) $a<-3$ ۳) $a>-1$ ۴) $-3<a<0$

۱۱۵- حدود m برای آن‌که معادلهٔ $(m-1)x^2+mx+m-3=0$ دو ریشهٔ مختلف‌العلامه داشته باشد، کدام است؟

۱) $m>2$ ۲) $1<m<3$ ۳) $m<1$ ۴) $0<m<1$

۱۱۶- به ازای چه مقدار m، معادلهٔ $3x^2+(m^2-16)x+m+3=0$ دارای دو ریشهٔ قرینه است؟ انسانی خارج ۸۵

۱) ۴- ۲) ۴± ۳) ۳- ۴) ۳±

۱۱۷- به ازای کدام مقدار m، معادلهٔ درجه دوم $mx^2+5x+m^2-6=0$، دو ریشهٔ حقیقی و معکوس هم دارد؟

۱) ۳- ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳

۱۱۸- به‌ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2+3x+m^2=2$، معکوس یک‌دیگرند؟ تجربی خارج ۹۰

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۹- کدام‌یک از معادلات زیر، دو جواب مختلف‌العلامه دارد که جواب منفی از نظر قدر مطلق از جواب مثبت بزرگ‌تر است؟

۱) $8x^2-4x-3=0$ ۲) $-x^2-8x+7=0$ ۳) $-x^2-9x-12=0$ ۴) $-x^2+7x+8=0$

۱۲۰- به ازای کدام مقدار m، مجموع مربع‌های دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $x^2-mx+1-m=0$ برابر ۱ می‌شود؟

۱) ۳ ۲) $3,-1$ ۳) ۱ ۴) $-3,1$

۱۲۱- به ازای کدام مقدار m، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $mx^2-(m+3)x+5=0$ برابر ۶ می‌باشد؟ تجربی داخل ۹۳

۱) $-\frac{9}{5}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{9}{5}, 1$ ۴) $-1, \frac{9}{5}$

۱۲۲- اگر $x_1=\sin\alpha$ و $x_2=\cos\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ $x^2+px+q=0$ باشند، حاصل $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$ کدام است؟

۱) $\frac{p}{q}$ ۲) $\frac{q}{p}$ ۳) q ۴) $\frac{1}{q}$

۱۲۳- در معادلهٔ درجه دوم $x^۲-\left(\frac{۱}{a^۴}+a^۲\right)x+\frac{۱}{a^۲}=۰$، حاصل $\frac{x_۱}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۱}$ کدام است؟ ($x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادله هستند.)

۱) $a^۸+\frac{۱}{a^۸}$ ۲) $a^۲+\frac{۱}{a^۲}$ ۳) $a^۴+\frac{۱}{a^۴}$ ۴) $a^۶+\frac{۱}{a^۶}$

۱۲۴- در معادلهٔ $x^۲-۴x+۳=۰$، حاصل $x_۱^۴+x_۲^۴$ کدام است؟ ($x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادله‌اند.)

۱) ۱۰ ۲) ۲۸ ۳) ۴۰ ۴) ۸۲

۱۲۵- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-۴x+۱=۰$ باشند، حاصل $x_۱^۳+x_۲^۳$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۷۲ ۳) ۴۸ ۴) ۵۲

۱۲۶- در معادلهٔ $x^۲-۲x+\frac{۳}{۴}=۰$، حاصل $x_۱^۴+x_۲^۴$ کدام است؟ ($x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله هستند.)

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۴۱}{۲}$ ۴) $\frac{۴۱}{۸}$

۱۲۷- در معادلهٔ $x^۲-۴x+۱=۰$، حاصل $\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}$ کدام است؟ ($x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادله‌اند.)

۱) ۶ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۶}$

۱۲۸- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $۴x^۲-۱۲x+۱=۰$ باشند، مقدار $\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}$ کدام است؟ ریاضی خارج ۸۵

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۲۹- در معادلهٔ $x^۲-۳x+۱=۰$، حاصل $x_۱\sqrt{x_۲}+x_۲\sqrt{x_۱}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) ۵ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۳

۱۳۰- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲-۷x-۸=۰$ باشند، حاصل $\sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۳ ۳) -۴ ۴) ۱

۱۳۱- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲-(۱+\sqrt{۳})x+\sqrt{۳}=۰$ باشند، حاصل $\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}+\left|\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲}\right|$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt[۴]{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\sqrt[۴]{۳}$

۱۳۲- اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۳x-۱=۰$ باشند، حاصل $|\alpha|+|\beta|$ کدام است؟

۱) $۳+\sqrt{۱۳}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۵}$

۱۳۳- اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+۵x-۲=۰$ باشند به طوری که $a>۰$، آن‌گاه حاصل $|a+۲b|+|b|-|a|$ کدام است؟

۱) $-۲a-۳b$ ۲) $a+۳b$ ۳) b ۴) $-۲a$

۱۳۴- در معادلهٔ درجه دوم $x^۲+bx+c=۰$ با شرط $b=c+۱$، یکی از ریشه‌ها به کدام صورت است؟

۱) $-c$ ۲) $۲b-۱$ ۳) $\frac{b}{۲}$ ۴) c

۱۳۵- اگر رابطهٔ $۹a+c=۳b$، بین ضرایب معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ برقرار باشد، یک جواب معادله کدام است؟

۱) $\frac{c}{۳a}$ ۲) $-\frac{c}{۳a}$ ۳) $\frac{۳c}{a}$ ۴) $-\frac{۳c}{a}$

۱۳۶- اگر $a>۰$ و دو معادلهٔ $x^۲+۲x+a=۰$ و $x^۲-x-۲a=۰$ دارای یک ریشهٔ مشترک باشند، آن‌گاه این ریشهٔ مشترک کدام است؟

۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۳۷- اگر دو معادلهٔ $nx^۲-۷x+۳=۰$ و $۲x^۲-۶x-m=۰$ در یک ریشه مشترک باشند، حاصل تقسیم ریشه‌های غیرمشترک آن‌ها کدام می‌تواند باشد؟

۱) $-\frac{۶}{mn}$ ۲) $\frac{۶}{mn}$ ۳) $-\frac{۳}{mn}$ ۴) $\frac{۳}{mn}$

۱۳۸- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x(ax^۲-x-۵)=۲$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشهٔ دیگر آن کدام است؟ ریاضی خارج ۸۷

۱) -۲ ۲) $-\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۳۹- اگر نمودار تابع $f(x)=۲x^۳-۵x^۲-x+m$، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطهٔ تلاقی دیگر آن با محور xها کدام‌اند؟ ریاضی خارج ۸۹

۱) $-۱,\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲},۱$ ۳) $-۱,\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۲},۳$

۱۴۰- تعداد جواب‌های معادلهٔ $۳x^۴ + ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۲x = ۰$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۴۱- اگر $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ جواب‌های معادلهٔ $x^۳ + ۴x^۲ - ۲x = ۳$ باشند، حاصل $x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۹ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۱۴۲- در معادلهٔ درجه دوم $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$، حاصل عبارت $(x_۱^۲ - ۴x_۱ + ۲)(x_۲^۲ - ۴x_۲ + ۴)$ کدام است؟ ($x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادله هستند.)

۱) ۸ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۴۳- اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^۲ - x - ۳ = ۰$ باشند، حاصل $(x_۱^۲ - ۳)(x_۲^۲ - ۳)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳- ۳) ۹ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۴۴- در معادلهٔ درجه دوم $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$، حاصل $\sqrt{x_۱^۲(۳x_۲ - ۱)}$ کدام است؟ ($x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادله‌اند.)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۴۵- اگر $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $x^۲ - ۵x = -۱$ باشند، حاصل $\frac{x_۲^۲ + ۱}{۳x_۲} + \frac{۲x_۱}{x_۱^۲ + ۱}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۲۸}{۱۵}$ ۳) $\frac{۳۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۲۹}{۱۵}$

درسنامهٔ ۵

تشکیل معادلهٔ درجه دوم

① معادلهٔ درجه دومی که جواب‌های آن اعداد حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ باشد، به صورت $x^۲ - (x_۱ + x_۲)x + x_۱x_۲ = ۰$ است. به عبارت دیگر، اگر مجموع دو عدد S و حاصل ضربشان P باشد، آن دو عدد از حل معادلهٔ $x^۲ - Sx + P = ۰$ به‌دست می‌آیند.

مثال: اگر مجموع دو عدد ۱۳ و حاصل ضرب آن‌ها ۳۶ باشد، آن دو عدد را بیابید.

پاسخ:
$$S = ۱۳, P = ۳۶ \Rightarrow x^۲ - ۱۳x + ۳۶ = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۴, x_۲ = ۹$$

② اگر معادلهٔ درجه دومی با ضرایب گویا دارای ریشهٔ غیرگویای $p + \sqrt{q}$ $(p, q \in \mathbb{Q})$ باشد، ریشهٔ دیگر آن به صورت $p - \sqrt{q}$ خواهد بود.

مثال: اگر $x_۱ = ۲ + \sqrt{۷}$ ریشهٔ یک معادلهٔ درجه دوم با ضرایب گویا باشد، ریشهٔ دیگر و معادلهٔ درجه دوم سازندهٔ این دو ریشه را به‌دست آورید.

پاسخ:
$$x_۱ = ۲ + \sqrt{۷} \Rightarrow x_۲ = ۲ - \sqrt{۷} \Rightarrow \begin{cases} x_۱ + x_۲ = ۴ \\ x_۱x_۲ = -۳ \end{cases} \Rightarrow x^۲ - ۴x - ۳ = ۰$$

بنابراین $x_۲ = ۲ - \sqrt{۷}$ ریشهٔ دیگر و $x^۲ - ۴x - ۳ = ۰$ معادلهٔ درجه دوم سازندهٔ آن‌ها است.

③ برای یافتن معادلهٔ درجه دوم جدید که ریشه‌های آن رابطه‌ای با ریشه‌های معادلهٔ قبلی داشته باشد، P' و S' را برای معادلهٔ جدید به‌دست آورده و آن‌گاه معادلهٔ $x^۲ - S'x + P' = ۰$ را تشکیل می‌دهیم.

مثال: اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$ باشند، معادلهٔ جدیدی بنویسید که ریشه‌های آن $۲\alpha + ۱$ و $۲\beta + ۱$ باشد.

پاسخ:
$$S = ۳ \Rightarrow \alpha + \beta = ۳ \quad (*) \quad , \quad P = ۱ \Rightarrow \alpha\beta = ۱ \quad (**)$$

با فرض $x_۱ = ۲\alpha + ۱$ و $x_۲ = ۲\beta + ۱$ داریم:

$$x_۱ + x_۲ = ۲\alpha + ۱ + ۲\beta + ۱ = ۲(\alpha + \beta) + ۲ \overset{(*)}{=\!=} ۲(۳) + ۲ = ۸ = S' \quad (I)$$

$$x_۱x_۲ = (۲\alpha + ۱)(۲\beta + ۱) = ۴\alpha\beta + ۲(\alpha + \beta) + ۱ \underset{(**)}{\overset{(*)}{=\!=}} ۴ \times ۱ + ۲ \times ۳ + ۱ = ۱۱ = P' \quad (II)$$

$$\text{معادلهٔ جدید}: x^۲ - S'x + P' = ۰ \xrightarrow[(II)]{(I)} \text{معادلهٔ جدید}: x^۲ - ۸x + ۱۱ = ۰$$

④ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشند، برای یافتن معادلهٔ جدیدی که ریشه‌های آن $mx_۱ + n$ و $mx_۲ + n$ باشند، X را برابر با $mx + n$ فرض کرده و لذا $x = \frac{X - n}{m}$ به‌دست می‌آید. حال $\frac{X - n}{m}$ را جای x در معادله قرار می‌دهیم. در این حالت، معادله به‌صورت $a(\frac{X - n}{m})^۲ + b(\frac{X - n}{m}) + c = ۰$ تبدیل می‌شود.

مثال: مثال قبل را به روش (۴) حل کنید.

پاسخ:

$$X=۲x+۱\Rightarrow \frac{X-۱}{۲}=x$$

$$x^۲-۳x+۱=۰\Rightarrow \left(\frac{X-۱}{۲}\right)^۲-۳\left(\frac{X-۱}{۲}\right)+۱=۰\Rightarrow \frac{X^۲-۲X+۱}{۴}-\frac{۳X-۳}{۲}+۱=۰\xrightarrow{\times ۴} X^۲-۸X+۱۱=۰$$

نکاتی از تشکیل معادلهٔ جدید

① معادلهٔ جدیدی که ریشه‌هایش قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، به‌صورت $ax^۲-bx+c=۰$ است.

② معادلهٔ جدیدی که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، به‌صورت $ax^۲+kbx+k^۲c=۰$ است.

③ معادلهٔ جدیدی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، به‌صورت $cx^۲+bx+a=۰$ است.

حل معادله به روش تغییر متغیر

در برخی از معادلات می‌توان با درنظر گرفتن یک متغیر جدید، آن معادله را به یکی از معادلاتی که می‌شناسیم، تبدیل کرد. در این حالت بعد از حل معادلهٔ حاصل، جواب‌ها را در عبارت تغییر متغیر قرار می‌دهیم و مقادیر متغیر مجهول اصلی معادلهٔ اولیه را به دست می‌آوریم.

مثال: معادلهٔ $\left(\frac{x^۲}{۳}-۲\right)^۲-۱۱\left(\frac{x^۲}{۳}-۲\right)+۱۰=۰$ را حل کنید. هماهنگ کشوری دی ۹۱

پاسخ: تغییر متغیر $t=\frac{x^۲}{۳}-۲$ را لحاظ می‌کنیم. داریم:

$$t^۲-۱۱t+۱۰=۰\Rightarrow (t-۱۰)(t-۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} t=۱۰\Rightarrow \frac{x^۲}{۳}-۲=۱۰\Rightarrow x=\pm۶ \\ t=۱\Rightarrow \frac{x^۲}{۳}-۲=۱\Rightarrow x=\pm۳ \end{cases}$$

صفرهای تابع

برای تابع f جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر صفرهای تابع f آن مقادیری از x (در دامنهٔ f) هستند که به ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم، صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار f با محور xها است.

مثال: صفرهای تابع $f(x)=x^۴-۱۳x^۲+۳۶$ را به‌دست آورید. مشابه تمرین کتاب درسی

پاسخ: جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ صفرهای تابع است. داریم:

$$x^۴-۱۳x^۲+۳۶=۰\xrightarrow[\text{برحسب } x^۲]{\text{تجزیه با اتحاد یک جمله مشترک}}(x^۲-۴)(x^۲-۹)=۰\Rightarrow\begin{cases}x^۲-۴=۰\Rightarrow x=\pm۲\\ x^۲-۹=۰\Rightarrow x=\pm۳\end{cases}$$

بنابراین صفرهای تابع $x=\pm۲$ و $x=\pm۳$ می‌باشند.

۱۴۶- اگر مجموع دو عدد $۴\sqrt{۳}$ و حاصل‌ضرب‌شان ۶- باشد، عدد کوچک‌تر کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۳}$ ۳) $-۳(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})$ ۴) $-۳(۲-\sqrt{۳})$

۱۴۷- جواب‌های معادلهٔ درجه دومی برابر با $x_۱=(\sqrt{۲}-۱)^۳$ و $x_۲=(\sqrt{۲}+۱)^۳$ هستند. این معادله کدام است؟

۱) $x^۲-۴\sqrt{۲}x+۱=۰$ ۲) $x^۲-۶\sqrt{۲}x+۱=۰$ ۳) $x^۲-۱۰\sqrt{۲}x+۱=۰$ ۴) $x^۲-۸\sqrt{۲}x+۱=۰$

۱۴۸- کدام‌یک از معادلات زیر دارای دو جواب $\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}$ و $\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}$ است؟

۱) $x^۲-۲\sqrt{۲}x+۱=۰$ ۲) $x^۲-۲x-۱=۰$ ۳) $x^۲-(\sqrt{۱+\sqrt{۲}})x+۱=۰$ ۴) $x^۲-۳\sqrt{۲}x+۱=۰$

۱۴۹- معادلهٔ درجه دوم با ضرایب گویا که یک جواب آن $۵+۲\sqrt{۳}$ باشد، کدام است؟

۱) $x^۲-۱۰x-۱۳=۰$ ۲) $x^۲-۱۰x+۱۳=۰$ ۳) $x^۲+۱۰x+۱۲=۰$ ۴) $x^۲-۱۰x+۱۲=۰$

۱۵۰- مساحت زمین مستطیل‌شکلی ۱۸ مترمربع و محیط آن ۱۷ متر است. اختلاف طول و عرض زمین، چند متر است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۱ ۳) ۰/۵ ۴) ۲

۱۵۱- ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲+ax+b=۰$، از ریشه‌های معادلهٔ $۳x^۲-۴x-۱=۰$ یک واحد بیشتر است. b کدام است؟ تجربی خارج ۸۶

۱) ۵- ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۵۲- ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $x^2+ax+b=0$، یک واحد از ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+7x+1=0$ بیشتر است. b کدام است؟ تجربی داخل ۸۷

۱) -2 ۲) -1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۱۵۳- اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^2-px-1=0$ ثلث ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-12x-9q=0$ باشد، حاصل pq کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۵۴- ریشه‌های معادلهٔ $x^2+mx+n=0$ مجذور ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x-4=0$ می‌باشند. $n-m$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) -20 ۳) ۱۶ ۴) -4

۱۵۵- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x-4=0$ باشند، مجموعه‌جواب‌های کدام معادله، به‌صورت $\left\{\frac{1}{\alpha}+1,\frac{1}{\beta}+1\right\}$ است؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) $4x^2-5x+1=0$ ۲) $4x^2-3x+1=0$ ۳) $4x^2-5x-1=0$ ۴) $4x^2-3x-1=0$

۱۵۶- ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $-2x^2-3x-1=0$، یک واحد کم‌تر است؟ تجربی داخل ۹۴

۱) $x^2-3x+1=0$ ۲) $x^2+3x+1=0$ ۳) $x^2-5x+2=0$ ۴) $x^2+5x+2=0$

۱۵۷- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $4x^2-kx+25=0$ به‌صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2},\frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟ ریاضی داخل ۹۰

۱) ۲۷ ۲) ۲۹ ۳) ۲۸ ۴) ۳۱

۱۵۸- اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-3x=1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادلهٔ $8x^2+kx-1=0$ به‌صورت $\{\alpha^2\beta,\alpha\beta^2\}$ است؟ ریاضی خارج ۹۰

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹

۱۵۹- اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2-2x-9=0$ بوده و $2x_1+x_2$ و x_1+2x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2+Ax+B=0$ باشند، $A+B$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) -7 ۳) ۵ ۴) -5

۱۶۰- معادله‌ای که جواب‌های آن جذر جواب‌های معادلهٔ $x^2-4x+1=0$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2-2\sqrt{7}x+1=0$ ۲) $x^2-16x+1=0$ ۳) $x^2-2x+1=0$ ۴) $x^2-\sqrt{6}x+1=0$

۱۶۱- جواب‌های کدام معادله، عکس و قرینهٔ جواب‌های معادلهٔ $(a-1)x^2+bx=1$ است؟

۱) $x^2-bx+1=a$ ۲) $x^2-bx+a=1$ ۳) $x^2+bx+1=a$ ۴) $x^2+bx+a=1$

۱۶۲- معادلهٔ $x^2-2x-1=0$ مفروض است. معادلهٔ درجه دومی تشکیل داده‌ایم که هر ریشه‌اش، مکعب ریشهٔ معادلهٔ داده شده می‌باشد. مجموع ضرایب معادله‌ای که تشکیل داده‌ایم، کدام است؟

۱) ۸ ۲) -14 ۳) -8 ۴) ۱۴

۱۶۳- در معادلهٔ درجه دوم $(x-1)^2+2\sqrt{3}(x-1)=6$، بزرگ‌ترین جواب x کدام است؟ انسانی داخل ۸۷

۱) $4-\sqrt{3}$ ۲) $2-\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۱۶۴- معادلهٔ $(x^2+x+1)^2+3(x^2+x+1)-4=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) چهار ریشه ۲) دو ریشه
۳) دو ریشهٔ متفاوت و یک ریشهٔ مضاعف ۴) دو ریشهٔ مضاعف

۱۶۵- معادلهٔ $(x^2-x)^2-(x^2-x)-12=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶۶- معادلهٔ $(x^2+1)^2-7(x^2+1)+12=0$ چند ریشه دارد؟

۱) ۴ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶۷- معادلهٔ $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۶۸- معادلهٔ $(x-\sqrt{x})^2-\frac{11}{10}(x-\sqrt{x})+\frac{1}{10}=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۱۶۹- مجموع ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$ کدام است؟ تجربی داخل ۹۰

۱) -4 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

۱۷۰- اگر $x=\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ ریشهٔ معادلهٔ $x^4+ax^2+b=0$ و a و b اعداد صحیح باشند، آن‌گاه حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) 47 ۲) -47 ۳) -3 ۴) 3

۱۷۱- به ازای کدام مقادیر m در معادلهٔ $x-2\sqrt{x}+m-1=0$، دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟ تجربی خارج ۸۸

۱) $m\geq 1$ ۲) $m<2$ ۳) $1\leq m<2$ ۴) هیچ مقدار m

۱۷۲- اگر معادلهٔ $x^4-(m+2)x^2+m+5=0$ دارای ۴ ریشهٔ حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ تجربی داخل ۸۵

۱) $m<-4$ ۲) $m>4$ ۳) $-4<m<4$ ۴) $4<m<9$

۱۷۳- اگر $x=m$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^2-(3m+1)x+3$ باشد، صفر دیگر آن کدام است؟ $(m\in\mathbb{N})$

۱) $2m+1$ ۲) $2m$ ۳) $2m-1$ ۴) $-m$

۱۷۴- اگر $x=1$ یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^3+x^2+ax+1$ باشد، مجموع معکوس دو صفر دیگر تابع کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) -1 ۴) -2

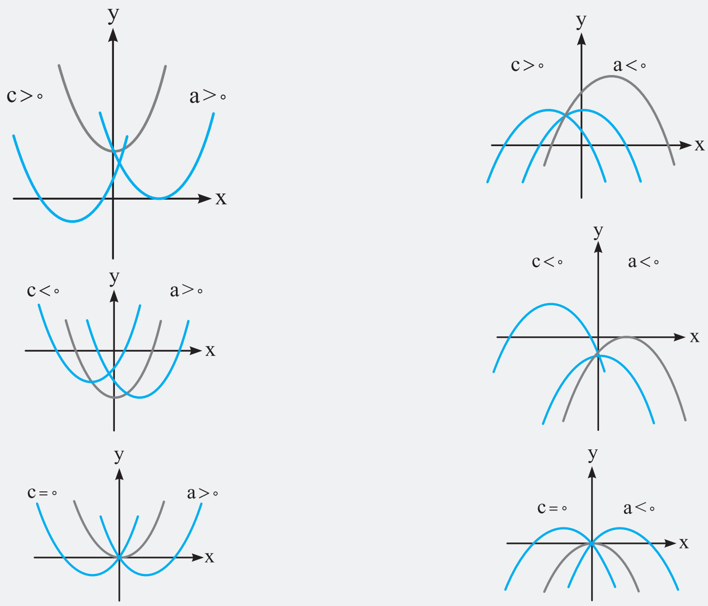
درسنامهٔ ۶

نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$

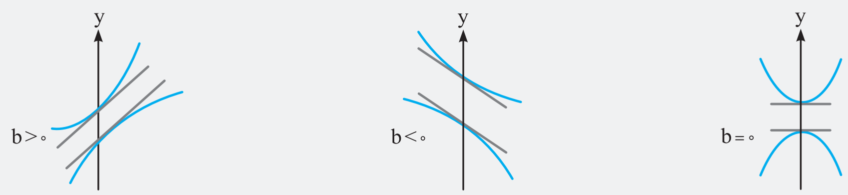
نمودار تابع درجه دوم به پارامترهای a، b و c بستگی دارد. اکنون به معرفی پارامترهای گوناگون تابع درجه دوم می‌پردازیم:

① اگر $a>0$ باشد، نمودار به‌صورت (می‌نیمم دارد) و اگر $a<0$ باشد، نمودار به‌صورت (ماکزیمم دارد) است.

② اگر $c>0$ باشد، نمودار تابع محور y ها را با عرض مثبت و اگر $c<0$ باشد، محور y ها را با عرض منفی قطع می‌کند و اگر $c=0$ باشد، نمودار از مبدأ مختصات عبور می‌کند. بنابراین:

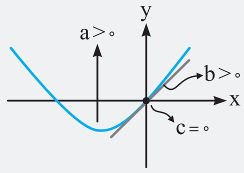


③ اگر $b>0$ باشد، نمودار تابع درجه دوم محور y ها را با شیب مثبت و اگر $b<0$ باشد، محور y ها را با شیب منفی و اگر $b=0$ باشد، محور y ها را با شیب صفر قطع می‌کند. در واقع مقدار b نشان‌دهندهٔ شیب تابع هنگام عبور از محور عرض‌ها است.

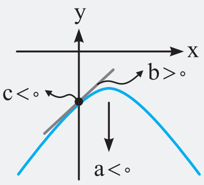


④ در مورد ریشه‌های تابع درجه دوم، خواصی که در معادلهٔ درجه دوم گفتیم، حاکم است.

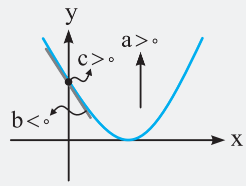
مثال: علامت‌های a، b، c و Δ را در نمودارهای زیر مشخص کنید.



$\Delta > ۰$



$\Delta < ۰$



$\Delta = ۰$

محدودهٔ تغییرات تابع (عبارت) درجه دوم

① نمودار تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ همواره بالای محور x ها است (به عبارت دیگر چندجمله‌ای $ax^۲ + bx + c$ همواره مثبت است) اگر و تنها اگر $a > ۰$ و $\Delta < ۰$ باشد.

② نمودار تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ همواره پایین محور x ها است (به عبارت دیگر چندجمله‌ای $ax^۲ + bx + c$ همواره منفی است) اگر و تنها اگر $a < ۰$ و $\Delta < ۰$ باشد.

③ نمودار تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ مماس بر محور x ها بوده و بالای آن قرار دارد، هرگاه $\Delta = ۰$ و $a > ۰$ باشد.

④ نمودار تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ مماس بر محور x ها بوده و پایین آن قرار دارد، هرگاه $\Delta = ۰$ و $a < ۰$ باشد.

نتیجه: چندجمله‌ای درجه دوم $ax^۲ + bx + c$ همواره نامنفی است اگر و تنها اگر $a > ۰$ و $\Delta \leq ۰$ باشد.

نتیجه: چندجمله‌ای درجه دوم $ax^۲ + bx + c$ همواره نامثبت است اگر و تنها اگر $a < ۰$ و $\Delta \leq ۰$ باشد.

⑤ نمودار تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات عبور می‌کند، هرگاه $\frac{c}{a} < ۰$ باشد، یعنی دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه باشد.

⑥ تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ با شرط $a > ۰$ قطعاً از ناحیهٔ اول و دوم و با شرط $a < ۰$ قطعاً از ناحیهٔ سوم و چهارم عبور می‌کند.

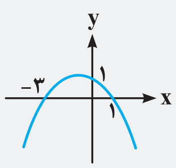
نکته مهم: در نمودار تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$، رأس سهمی به مختصات $S(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a})$ می‌باشد و خط $x = -\frac{b}{۲a}$ محور تقارن سهمی است.

تذکر:

① اگر نمودار تابع درجهٔ دوم $y = ax^۲ + bx + c$ محورxها را در نقاط به طول‌های $x_۱$ و $x_۲$ قطع کند، آن‌گاه معادله را به صورت $y = a(x - x_۱)(x - x_۲)$ نیز می‌توان نوشت.

② اگر نمودار تابع درجهٔ دوم $y = ax^۲ + bx + c$ با محورxها فقط در یک نقطه مانند $x_۱$ اشتراک داشته (مماس) باشد، آن‌گاه معادله را به صورت $y = a(x - x_۱)^۲$ نیز می‌توان نوشت.

مثال: نمودار متناظر تابع درجه دوم $f(x) = ax^۲ + bx + c$ مطابق شکل زیر است. در این صورت $f(۳)$ کدام است؟



۱) $-\frac{۵}{۳}$
۲) -۴
۳) $\frac{۵}{۳}$
۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ (۲)، می‌دانیم اگر ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ برابر $x_۱$ و $x_۲$ باشند، عبارت متناظر آن به صورت زیر می‌باشد:

$$ax^۲ + bx + c = a(x - x_۱)(x - x_۲)$$

چون $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = -۳$، لذا $ax^۲ + bx + c = a(x - ۱)(x + ۳)$. از طرفی دیگر نمودار تابع f از نقطهٔ $(۰,۱)$ می‌گذرد، پس $a(۰ - ۱)(۰ + ۳) = ۱$، لذا $a = -\frac{۱}{۳}$ و در نتیجه $f(x) = -\frac{۱}{۳}(x - ۱)(x + ۳)$. بنابراین:

$$f(۳) = -\frac{۱}{۳}(۳ - ۱)(۳ + ۳) = -\frac{۱}{۳}(۲)(۶) = -۴$$

۱۷۵- به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y = (m - ۱)x^۲ + \sqrt{۳}x + m$ همواره در زیر محور x ها است؟ ریاضی داخل ۸۵

۱) $m < -\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۱}{۲} < m < ۱$
۳) $۱ < m < \frac{۳}{۲}$
۴) $m > \frac{۳}{۲}$

۱۷۶- به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(m+2)x^2-2mx+1$ همواره در بالای محور x ها است؟ ریاضی خارج ۸۵

۱) $m>-2$ ۲) $-2<m<-1$ ۳) $-2<m<2$ ۴) $-1<m<2$

۱۷۷- به ازای کدام مقدار m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(m-2)x^2-3x+m+2$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟

۱) -3 ۲) $-\frac{5}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 3

۱۷۸- به ازای کدام مقادیر m، عبارت $(m-1)x^2+6x+2m+1$، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟ ریاضی خارج ۹۰

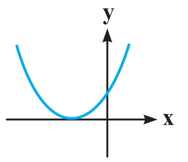
۱) $m<-2$ ۲) $m>2/5$ ۳) $1<m<2$ ۴) $1<m<2/5$

۱۷۹- اگر عبارت $(a-1)x^2+(a-1)x+1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، مجموعه مقادیر a کدام است؟ ریاضی داخل ۹۱

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\{a : a<1\}$ ۳) $\varnothing$ ۴) $\{a : 1<a<5\}$

۱۸۰- به ازای چند مقدار m، نمودار تابع $y=\left(3-\frac{x}{m}\right)(mx-1)$ مماس بر محور x هاست؟

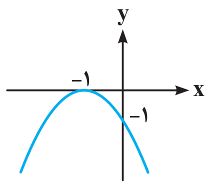
۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) صفر



۱۸۱- نمودار تابع درجه دوم $y=9x^2-(a+6)x+1$ مانند شکل مقابل است. a کدام است؟ انسانی خارج ۸۶

۱) صفر ۲) -12

۳) $-6, 6$ ۴) $-12, 0$



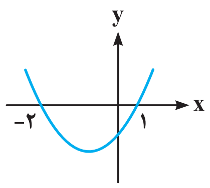
۱۸۲- معادلهٔ سهمی شکل مقابل، کدام است؟

۱) $y=-x^2-2x-1$

۲) $y=-x^2+2x-1$

۳) $y=x^2+2x+1$

۴) $y=-\frac{1}{2}x^2+x-1$



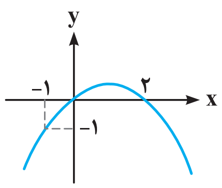
۱۸۳- معادلهٔ سهمی شکل مقابل، به کدام صورت است؟ انسانی خارج ۸۸

۱) $y=2x^2-2x-4$

۲) $y=2x^2+2x-4$

۳) $y=-2x^2+2x-4$

۴) $y=-2x^2+4x-4$

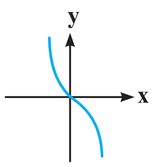


۱۸۴- نمودار تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$، مانند شکل مقابل است. حاصل $a+3b-c$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$

۳) ۶ ۴) ۲

۱۸۵- شکل زیر، نمودار تابع $y=ax^3+bx^2-4x$ است. کدام دوتایی برای (a,b) می‌تواند مورد قبول باشد؟



تجربی خارج ۸۹

۱) $(-1,3)$

۲) $(-1,6)$

۳) $(1,-2)$

۴) $(1,4)$

۱۸۶- با کدام مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=(m+2)x^2-2x+1$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات می‌گذرد؟ ریاضی خارج ۸۷

۱) $m<-2$ ۲) $m<-1$ ۳) $-2<m<-1$ ۴) $-4<m<-2$

۱۸۷- به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=(1-m)x^2+x+m-2$ از هر چهار ناحیهٔ محورهای مختصات گذشته و دارای ماکزیمم است؟

۱) $m<1$ ۲) $m>2$ ۳) $1<m<2$ ۴) $-1<m<2$

۱۸۸- به ازای کدام مقادیر a، منحنی به معادلهٔ $y=ax^2-(a+2)x$ از ناحیهٔ دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ ریاضی داخل ۸۹

۱) $a\le 2$ ۲) $a>0$ ۳) $a\le -2$ ۴) $-2\le a<0$

۱۸۹- به ازای کدام مقادیر m، نمودار تابع $y=mx^2+(m-1)x$ از ناحیهٔ سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) $m\le 1$ ۲) $0\le m\le 1$ ۳) $m\ge 1$ ۴) $1\le m\le 2$

۱۹۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x)=(a-۳)x^۲+ax-۱$، از ناحیهٔ اول محورهای مختصات <u>نمی‌گذرد</u>؟ ریاضی داخل ۹۲

۱) $a\le ۲$ ۲) $۰<a\le ۲$ ۳) $۲<a<۳$ ۴) $۰<a<۳$

۱۹۱- به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y=(m-۲)x^۲-۲(m+۱)x+۱۲$ محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟ ریاضی داخل ۹۵

۱) $m>۲$ ۲) $-۱<m<۲$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

۱۹۲- رأس سهمی به معادلهٔ $y=-x^۲+ax+۵$ بر روی خط به معادلهٔ $x=۲$ قرار دارد. این سهمی از کدام نقطه می‌گذرد؟ انسانی داخل ۸۵

۱) $(-۱,۴)$ ۲) $(-۱,۵)$ ۳) $(۱,۸)$ ۴) $(۱,۹)$

۱۹۳- به ازای کدام مقدار m، رأس سهمی $y=mx^۲-۳x+۱$ بر روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۱۵}{۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۹۴- نمودار یک سهمی به معادلهٔ $y=x^۲+bx+c$ بر محور xها مماس و معادلهٔ محور تقارن آن به‌صورت $x=-۲$ است. عرض محل تقاطع نمودار با محور yها، چه مقداری است؟

۱) ۴ ۲) -۴ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۹۵- خط $x=۱$ محور تقارن سهمی به معادله $y=-۲x^۲+bx+c$ است. این سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند. عرض رأس سهمی کدام است؟ انسانی خارج ۹۰

۱) ۳/۵ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۵

۱۹۶- نقطهٔ $A(-۱,-۴)$ رأس سهمی به معادلهٔ $y=۳x^۲+ax+b$ است. این سهمی محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ انسانی داخل ۹۰

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۲

۱۹۷- در معادلهٔ درجه دومی به عنوان ضابطهٔ یک سهمی، $a=-۱$ (ضریب جملهٔ درجه دوم)، $\Delta=۱۶$ و مجموع ریشه‌ها برابر ۲ بوده است. این سهمی، فاقد کدام ویژگی است؟

۱) رو به پایین باز می‌شود. ۲) محور تقارن: خط $x=۲$ ۳) بیشترین مقدار را دارد. ۴) مختصات رأس: $(۱,۴)$

۱۹۸- بیشترین مقدار نمودار تابع $f(x)=-x^۲+bx+c$ برابر ۱ بوده، سهمی از ناحیهٔ اول محورهای مختصات <u>نمی‌گذرد</u> و محور yها را به عرض -۳ قطع می‌نماید، طول رأس سهمی چه عددی است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۴

درسنامهٔ ۷

ماکزیمم و مینیمم توابع درجه دوم

نمودار تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ با شرط $a>۰$، به صورت  بوده و دارای مینیمم و با شرط $a<۰$، به صورت  بوده و دارای ماکزیمم است.

تذکر: در مورد چندجمله‌ای درجه دوم $P(x)=ax^۲+bx+c$ نیز موارد فوق حاکم است.

روش‌های یافتن ماکزیمم یا مینیمم توابع درجه دوم (و چندجمله‌ای‌های درجه دوم)

روش مربع کامل کردن: در این روش ابتدا از ضریب $x^۲$ فاکتور گرفته و آن را به‌صورت $a\left(x^۲+\frac{b}{a}x\right)+c$ می‌نویسیم. سپس به عبارت داخل پرانتز، عدد $\left(\frac{b}{۲a}\right)^۲$ را اضافه و کم می‌کنیم و مربع کامل تشکیل می‌دهیم.

مثال: مینیمم و ماکزیمم چندجمله‌ای‌های $۲x^۲+۸x-۲$ و $-۳x^۲+۶x+۱$ را به دست آورید.

پاسخ:

الف) $۲x^۲+۸x-۲=۲(x^۲+۴x)-۲=۲\left(x^۲+۴x+\left(\frac{۴}{۲\times ۱}\right)^۲-\left(\frac{۴}{۲\times ۱}\right)^۲\right)-۲=۲(x^۲+۴x+۴-۴)-۲$

$=۲(x^۲+۴x+۴)-۸-۲=۲(x+۲)^۲-۱۰\ge -۱۰\Rightarrow$ کم‌ترین مقدار $=-۱۰$

ب) $-۳x^۲+۶x+۱=-۳(x^۲-۲x)+۱=-۳\left(x^۲-۲x+\left(\frac{-۲}{۲\times ۱}\right)^۲-\left(\frac{-۲}{۲\times ۱}\right)^۲\right)+۱$

$=-۳(x^۲-۲x+۱-۱)+۱=-۳(x^۲-۲x+۱)+۳+۱=-۳(x-۱)^۲+۴\le ۴\Rightarrow$ بیشترین مقدار $=۴$

روش یافتن مختصات نقطهٔ اکسترمم: کم‌ترین یا بیشترین مقدار تابع $y = ax^2 + bx + c$ بسته به علامت a در نقطه به طول $x = -\frac{b}{2a}$ اتفاق می‌افتد. بنابراین بر اساس علامت ضریب x^2، به داشتن کم‌ترین یا بیشترین مقدار پی برده و سپس با جای‌گذاری $x = -\frac{b}{2a}$، مقدار آن را به‌دست می‌آوریم.

مثال: مختصات نقاط ماکزیمم و می‌نیمم توابع $f(x) = 2x^2 + 8x - 2$ و $g(x) = -3x^2 + 6x + 1$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$f(x) = 2x^2 + 8x - 2 \xrightarrow{\text{ضریب } x^2 \text{ مثبت است، پس می‌نیمم دارد.}} x_{min} = -\frac{8}{2\times 2} = -2 \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow f(-2) = 2(-2)^2 + 8(-2) - 2 = -10 \;:\text{کم‌ترین مقدار}$$

$$g(x) = -3x^2 + 6x + 1 \xrightarrow{\text{ضریب } x^2 \text{ منفی است، پس ماکزیمم دارد.}} x_{max} = -\frac{6}{2\times(-3)} = 1 \quad (**)$$

$$(**) \Rightarrow g(1) = -3(1)^2 + 6\times(1) + 1 = 4 \;:\text{بیشترین مقدار}$$

روش یافتن عرض نقطهٔ (مقدار) اکسترمم: کم‌ترین یا بیشترین مقدار تابع $y = ax^2 + bx + c$ بسته به علامت a، برابر است با $-\frac{\Delta}{4a}$.

مثال: ماکزیمم و می‌نیمم توابع $y = 2x^2 + 8x - 2$ و $y = -3x^2 + 6x + 1$ را به‌دست آورید.

پاسخ:

$$y = 2x^2 + 8x - 2 \xrightarrow[\text{زیرا } a = 2 > 0]{\text{می‌نیمم دارد}} y_{min} = -\frac{8^2 - 4\times 2\times(-2)}{4\times(2)} = -10$$

$$y = -3x^2 + 6x + 1 \xrightarrow[\text{زیرا } a = -3 < 0]{\text{ماکزیمم دارد}} y_{max} = -\frac{6^2 - 4\times(-3)\times 1}{4\times(-3)} = 4$$

حل مسائل کاربردی که تبدیل به تابع درجه دوم می‌شوند

در حل مسائلی که تبدیل به درجه دوم می‌شوند، قبل از هر چیزی دنبال کلماتی مانند بیشترین، کم‌ترین، بزرگ‌ترین، کوچک‌ترین و ... می‌گردیم تا بدانیم کدام کمیت را باید بیشینه یا کمینه کنیم و رابطهٔ آن را می‌نویسیم که عموماً رابطهٔ نوشته شده چند متغیره (اکثراً دو متغیره) است. سپس با داده‌های مسأله آن را تک متغیره می‌کنیم (که باید تبدیل به معادلهٔ درجه دوم شود)، آن‌گاه کم‌ترین یا بیشترین مقدار آن را به‌دست می‌آوریم.

مثال: مجموع دو عدد مثبت ۱۲ است. کم‌ترین مقدار مجموع مربعات دو عدد را به‌دست آورید.

پاسخ: باید به عبارت «**کم‌ترین** (کلمه‌ی مهم) **مقدار مجموع مربعات** (رابطه)» دقت کنیم. با فرض این‌که دو عدد x و y هستند، مجموع مربعات آن‌ها از رابطهٔ $S = x^2 + y^2$ به‌دست می‌آید. رابطهٔ به‌دست آمده دو متغیره است، اما بنابر صورت مسأله مجموع دو عدد ۱۲ می‌باشد، لذا $x + y = 12$ است. داریم:

$$\begin{cases} S = x^2 + y^2 \\ x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x \end{cases} \Rightarrow S = x^2 + (12 - x)^2 = 2x^2 - 24x + 144$$

بنابراین باید کم‌ترین مقدار $S = 2x^2 - 24x + 144$ را به‌دست آوریم. داریم:

روش اول (روش مربع کامل):

$$S = 2(x^2 - 12x) + 144 = 2\left(x^2 - 12x + \left(-\frac{12}{2}\right)^2 - \left(-\frac{12}{2}\right)^2\right) + 144 = 2(x^2 - 12x + 36) + 72 \Rightarrow S = 2(x-6)^2 + 72 \geq \underbrace{72}_{\text{کم‌ترین مقدار}}$$

روش دوم (مختصات نقطهٔ اکسترمم):

$$S = 2x^2 - 24x + 144 \xrightarrow{\text{ضریب } x^2 \text{ مثبت است. پس می‌نیمم دارد.}} x_{min} = -\frac{-24}{2\times 2} = 6 \Rightarrow y_{min} = y(6) = 2(6)^2 - 24\times 6 + 144 = 72$$

روش سوم (مقدار اکسترمم):

$$y_{min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-24)^2 - 4\times 2\times 144}{4\times 2} = 72$$

نکته: هرگاه مجموع دو متغیر مثبت، مقدار ثابتی باشد، آن‌گاه مجموع مربعات آن‌ها وقتی کم‌ترین مقدار را دارد که این متغیرها با هم برابر باشند. با استفاده از این نکته هم می‌توان جواب این مثال را به دست آورد:

$$x + y = 12 \xlongequal{x=y} x = y = \frac{12}{2} = 6 \Rightarrow \min(x^2 + y^2) = 6^2 + 6^2 = 72$$

۱۹۹- موشکی از سطح زمین پرتاب می‌شود به طوری‌که مسیر سهمی شکلی را طی می‌کند. اگر ارتفاع موشک بعد از t ثانیه از معادلهٔ $y=-۵t^{۲}+۱۰۰t+۲۰۰$ به دست آید، حداکثر ارتفاعی که موشک به آن خواهد رسید، کدام است؟

۱) ۴۰۰ ‏ ۲) ۵۰۰ ‏ ۳) ۶۰۰ ‏ ۴) ۷۰۰

۲۰۰- در مورد عبارت $A=(x+۳)(x-۱)$، کدام‌یک درست است؟

۱) حداکثر مقدار آن ۴- است. ‏ ۲) حداکثر مقدار آن ۱- است. ‏ ۳) حداقل مقدار آن ۴- است. ‏ ۴) حداقل مقدار آن ۱- است.

۲۰۱- اگر بیشترین مقدار تابع $f(x)=(k+۳)x^{۲}-۴x+k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

۱) ۴- ‏ ۲) ۱- ‏ ۳) ۱ ‏ ۴) ۴

۲۰۲- تابع درآمد فروش x تعداد از کالاهای یک شرکت در دورهٔ معینی به‌صورت $R(x)=۴۸x-۶x^{۲}$ است. قیمت فروش هر واحد کالا در ماکزیمم درآمد فروش، چه‌قدر است؟

۱) ۲۴ ‏ ۲) ۴۸ ‏ ۳) ۱۲ ‏ ۴) ۹۶

۲۰۳- x و y دو متغیرند و a عدد ثابتی است به طوری‌که $۲x+y=a$ می‌باشد. ماکزیمم مقدار xy کدام است؟

۱) $\frac{a^{۲}}{۸}$ ‏ ۲) $\frac{a^{۲}}{۱۶}$ ‏ ۳) $۲a^{۲}$ ‏ ۴) $۴a^{۲}$

۲۰۴- دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است. اگر حاصل ضرب آن‌ها می‌نیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲}$ ‏ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ‏ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ‏ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۲۰۵- اگر عدد حقیقی x بین صفر و ۳ تغییر کند، بیشترین مقدار اختلاف ۳ برابر آن عدد با مربع خود کدام است؟ انسانی داخل ۸۷

۱) $\frac{۳}{۲}$ ‏ ۲) $\frac{۹}{۴}$ ‏ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ‏ ۴) $\frac{۹}{۲}$

۲۰۶- از بین مربع‌هایی که عدد محیط‌شان از ۲ برابر عدد مساحت آن‌ها کم‌تر نباشد، بیشترین مقدار فزونی عدد محیط از عدد مساحت، چه‌قدر است؟

۱) ۴ ‏ ۲) ۳ ‏ ۳) ۱ ‏ ۴) ۲

۲۰۷- قرار است یک مزرعهٔ مستطیل شکل به ابعاد x و y برای پرورش گل ساخته شود. برای این کار ۱۰۰ متر نردهٔ چوبی برای محصور کردن این ناحیه در اختیار داریم. ابعاد این مستطیل را چه‌قدر درنظر بگیریم تا بزرگ‌ترین مساحت ممکن برای این مزرعه به‌دست آید؟

۱) $\begin{cases}x=۲۵\\y=۲۵\end{cases}$ ‏ ۲) $\begin{cases}x=۳۰\\y=۲۰\end{cases}$ ‏ ۳) $\begin{cases}x=۱۵\\y=۳۵\end{cases}$ ‏ ۴) $\begin{cases}x=۲۵\sqrt{۲}\\y=۵۰-۲۵\sqrt{۲}\end{cases}$

۲۰۸- از میان مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی‌متر است، مثلثی را اختیار کرده‌ایم که مساحت آن ماکزیمم است. مساحت این مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

۱) ۳۰ ‏ ۲) ۳۲ ‏ ۳) ۳۴ ‏ ۴) ۳۶

۲۰۹- اگر $x+y=۱۰$ باشد، ماکزیمم $\sqrt{xy}$ کدام است؟

۱) ۲۵ ‏ ۲) ۵ ‏ ۳) ۱۰ ‏ ۴) $\sqrt{۵}$

۲۱۰- مجموعهٔ تمام مستطیل‌هایی که محیط آن‌ها ۱۶ است را درنظر می‌گیریم. می‌نیمم طول اقطار این مستطیل‌ها کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ‏ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ‏ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ‏ ۴) ۶

۲۱۱- با طنابی به طول ثابت p می‌خواهیم زمینی به شکل مستطیل را که یک طرف آن رودخانه است، محدود کنیم. اگر مساحت این زمین بیشترین مقدار ممکن بوده و زاویهٔ بین قطر مستطیل و ضلع کوچک‌تر α باشد، آن‌گاه $\tan\alpha$ برابر کدام است؟

۱) ۲ ‏ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ‏ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ‏ ۴) ۴

۲۱۲- بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند مترمربع است؟ ریاضی خارج ۹۱

۱) ۹۵۸ ‏ ۲) ۹۶۸ ‏ ۳) ۹۷۸ ‏ ۴) ۹۸۸

پاسخ‌های تشریحی

۱ ۳ می‌دانیم اگر a_p و a_q دو جملهٔ متمایز دنبالهٔ حسابی $\{a_n\}$ باشند، قدرنسبت از رابطهٔ $d=\frac{a_p-a_q}{p-q}$ به‌دست می‌آید. در دنبالهٔ داده شده، جملهٔ اول ۱ و جملهٔ چهارم $\frac{۵}{۲}$ است. لذا داریم:

$$d=\frac{a_۴-a_۱}{۴-۱}=\frac{\frac{۵}{۲}-۱}{۴-۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]\Rightarrow S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}\left[۲\times۱+(۱۵-۱)\times\frac{۱}{۲}\right]=۶۷/۵$$

۲ ۲

$$d=a_۲-a_۱=p-۱-(۱+۲p)=-۲-p$$

$$S_۸=\frac{۸}{۲}\big(۲a_۱+(۸-۱)d\big)\xrightarrow{S_۸=۶۰}۴\big[۲(۱+۲p)+۷(-۲-p)\big]=۶۰\Rightarrow p=-۹$$

$$d=-۲-p=-۲-(-۹)=۷$$

۳ ۴ **روش اول:** با توجه به متن سؤال، $a_۲+a_۸=۰$ و $a_۷=۴$ است، لذا داریم:

$$\begin{cases}a_۲+a_۸=۰\\a_۷=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_۱+(۲-۱)d+a_۱+(۸-۱)d=۰\\a_۱+(۷-۱)d=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۲a_۱+۸d=۰\\a_۱+۶d=۴\end{cases}\Rightarrow a_۱=-۸\ ,\ d=۲$$

$$S_n=\frac{n}{۲}\big(۲a_۱+(n-۱)d\big)\Rightarrow S_۸=\frac{۸}{۲}\big(۲\times(-۸)+(۸-۱)\times۲\big)=-۸$$

روش دوم: با توجه به این‌که $۸+۲=۷+۳=۶+۴=۵+۵$ است، لذا داریم:

$$a_۲+a_۸=a_۳+a_۷=a_۴+a_۶=۲a_۵=۰\Rightarrow a_۵=۰$$

$$S_۸=a_۱+a_۲+a_۳+a_۴+a_۵+a_۶+a_۷+a_۸\Rightarrow S_۸=a_۱\quad(*)$$

صفر / صفر / صفر / صفر

$$d=\frac{a_۷-a_۵}{۷-۵}=\frac{a_۵-a_۱}{۵-۱}\Rightarrow\frac{۴-۰}{۲}=\frac{۰-a_۱}{۴}\Rightarrow a_۱=-۸\xRightarrow{(*)}S_۸=-۸$$

۴ ۳ می‌دانیم در یک دنبالهٔ حسابی، مجموع n جملهٔ اول از فرمول $S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]$ به‌دست می‌آید. داریم:

$$S_{۲۰}=۳S_{۱۲}\Rightarrow\frac{۲۰}{۲}(۲a_۱+۱۹d)=۳\left(\frac{۱۲}{۲}\right)(۲a_۱+۱۱d)\Rightarrow۲۰a_۱+۱۹۰d=۳۶a_۱+۱۹۸d$$

$$\Rightarrow-۸d=۱۶a_۱\Rightarrow d=-۲a_۱\quad(*)$$

$$a_۳=۶\Rightarrow a_۱+۲d=۶\xRightarrow{(*)}-۳a_۱=۶\Rightarrow a_۱=-۲\xRightarrow{(*)}d=۴\qquad(**)$$

$$a_{۱۰}=a_۱+۹d\xRightarrow[(**)]{(*)}a_{۱۰}=-۲+۳۶=۳۴$$

۵ ۳

$$\begin{cases}S_۸=\frac{۸}{۲}[۲a_۱+(۸-۱)d]=۸a_۱+۲۸d=۲\\a_n=a_۱+(n-۱)d\Rightarrow a_{۱۱}=a_۱+۱۰d\Rightarrow a_۱+۱۰d=۱۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S_۸=۲\Rightarrow۸a_۱+۲۸d=۲\\a_{۱۱}=۱۰\Rightarrow a_۱+۱۰d=۱۰\end{cases}\Rightarrow d=\frac{۳}{۲}$$

۶ ۳ **روش اول:** هر جمله از جملهٔ ما قبل خود به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}$ کم‌تر است، یعنی $d=-\frac{۱}{۲}$. داریم:

$$d=\frac{a_۵-a_۱}{۵-۱}\Rightarrow-\frac{۱}{۲}=\frac{۳-a_۱}{۴}\Rightarrow a_۱=۵$$

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}\left[۲\times۵+(۱۰-۱)\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right]=۲۷/۵$$

روش دوم: می‌دانیم که در یک دنبالهٔ حسابی، اگر $p+q=m+n=۲l$ باشد، $a_p+a_q=a_m+a_n=۲a_l$. همچنین اگر $a_۱$ و a_n، جملات اول و آخر یک دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$. داریم:

$$d=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow a_۶=a_۵+d=\frac{۵}{۲}$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(a_۱+a_{۱۰})\xlongequal{۱+۱۰=۵+۶}\frac{۱۰}{۲}(a_۵+a_۶)=\frac{۱۰}{۲}(۳+۲/۵)=۲۷/۵$$

۷ ۱

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(a_۱+a_{۲۰})\xrightarrow{۱+۲۰=۷+۱۴}\frac{۲۰}{۲}(a_۷+a_{۱۴})=۱۰(۹-۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}-۵)=۴۰$$

۸ ۱

$$S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(a_{۱۰}+a_۱)=۲۴۵\Rightarrow a_{۱۰}+a_۱=۴۹$$

تفاضل جملهٔ اول از جملهٔ آخر یعنی $a_{۱۰}-a_۱$، پس داریم:

$$\begin{cases}a_{۱۰}-a_۱=۴۵\\ a_{۱۰}+a_۱=۴۹\end{cases}\Rightarrow a_۱=۲$$

۹ ۱ اگر تعداد جملات یک دنبالهٔ حسابی فرد باشد، مجموع کل جملات برابر با حاصل‌ضرب تعداد جملات در جملهٔ وسط است.

با توجه به این‌که بین دو عدد a و b، ۷ عدد قرار داده‌ایم، لذا کلاً ۹ جمله داریم. بنابراین:

$$\text{فرد } n\Rightarrow S_n=n\times(\text{جملهٔ وسط})\Rightarrow S_۹=۹\times ۱۲=۱۰۸$$

۱۰ ۱

$$۱۲+۲=۲\times ۷\Rightarrow a_{۱۲}+a_۲=۲a_۷$$

$$a_۲+a_۷+a_{۱۲}=۱۵\xrightarrow{a_{۱۲}+a_۲=۲a_۷}۳a_۷=۱۵\Rightarrow a_۷=۵$$

بین سیزده جمله، جملهٔ هفتم جملهٔ وسط است، لذا داریم:

$$S_{۱۳}=۱۳\times a_۷=۱۳\times ۵=۶۵$$

۱۱ ۴ **روش اول:**

$$a_۷=\frac{a_۳}{۲}\Rightarrow ۲a_۷=a_۳\Rightarrow ۲(a_۱+۶d)=a_۱+۲d\Rightarrow a_۱+۱۰d=۰\Rightarrow a_{۱۱}=۰$$

جملهٔ یازدهم برابر با صفر است. با توجه به این‌که جملهٔ یازدهم، جملهٔ وسط ۲۱ جملهٔ اول است، لذا داریم:

$$S_{۲۱}=۲۱\times a_{۱۱}=۲۱\times ۰=۰$$

بنابراین مجموع ۲۱ جملهٔ اول برابر با صفر است.

روش دوم: با توجه به این‌که $۱۱+۳=۲\times ۷$، لذا $a_۷=\frac{a_{۱۱}+a_۳}{۲}$. پس داریم:

$$\begin{cases}a_۷=\dfrac{a_{۱۱}+a_۳}{۲}\\ a_۷=\dfrac{a_۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow a_{۱۱}=۰\Rightarrow ۲۱\times a_{۱۱}=۰\Rightarrow S_{۲۱}=۰$$

۱۲ ۲ هرگاه جملهٔ عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n=\alpha n+\beta$ باشد، آن دنباله بیانگر دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت α است.

روش اول:

$$a_n=\frac{۳}{۲}n-۵\Rightarrow d=۱/۵\ ,\ a_۱=\frac{۳}{۲}\times ۱-۵=-۳/۵$$

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}[۲\times(-۳/۵)+(۱۵-۱)\times ۱/۵)]=۱۰۵$$

روش دوم:

$$a_n=\frac{۳}{۲}n-۵\Rightarrow a_۱=-۳/۵\ ,\ a_{۱۵}=\frac{۳}{۲}(۱۵)-۵=۱۷/۵$$

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(a_۱+a_{۱۵})=\frac{۱۵}{۲}(-۳/۵+۱۷/۵)\Rightarrow S_{۱۵}=۱۰۵$$

روش سوم: $a_۸$ جملهٔ وسط بین ۱۵ جملهٔ اول است. داریم:

$$S_{۱۵}=۱۵\times a_۸=۱۵\times\left(\frac{۳}{۲}(۸)-۵\right)=۱۵\times ۷=۱۰۵$$

۱۳ ۲

$$a_n=n^۲-(n+۱)^۲=n^۲-n^۲-۲n-۱=-۲n-۱$$

بنابراین جملهٔ عمومی به‌صورت $a_n=-۲n-۱$ و لذا دنبالهٔ حسابی است. برای محاسبهٔ مجموع ۱۹ جملهٔ اول داریم:

روش اول:

$$a_n=-۲n-۱\Rightarrow d=-۲\ ,\ a_۱=-۲\times(۱)-۱=-۳$$

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]\Rightarrow S_{۱۹}=\frac{۱۹}{۲}[۲\times(-۳)+(۱۹-۱)(-۲)]=-۳۹۹$$

روش دوم:

$$a_n=-۲n-۱\Rightarrow a_۱=-۳\ ,\ a_{۱۹}=-۲\times(۱۹)-۱=-۳۹$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)\Rightarrow S_{۱۹}=\frac{۱۹}{۲}(a_۱+a_{۱۹})=\frac{۱۹}{۲}\left(-۳+(-۳۹)\right)=-۳۹۹$$

روش سوم: $a_{۱۰}$، جملهٔ وسط ۱۹ جملهٔ اول است. لذا داریم:

$$a_n=-۲n-۱\Rightarrow a_{۱۰}=-۲(۱۰)-۱=-۲۱$$

$$S_n=n\times(\text{جملهٔ وسط})=۱۹(-۲۱)=-۳۹۹$$

۱۴ **۳** با توجه به جملات دنبالهٔ حسابی، می‌دانیم جملهٔ اول ۲ و قدرنسبت ۴ است. لذا داریم:

$$a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow a_n=۲+(n-۱)\times ۴ \Rightarrow a_n=۴n-۲ \Rightarrow a_{۱۳}=۴\times ۱۳-۲=۵۰$$

روش اول:

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲\times ۲+(n-۱)\times ۴] \Rightarrow S_n=۲n^۲ \Rightarrow S_n=a_{۱۳} \Rightarrow ۲n^۲=۵۰ \Rightarrow n^۲=۲۵ \Rightarrow n=۵$$

روش دوم: می‌دانیم $n^۲=(۲n-۱)+\cdots+۵+۳+۱$. با دقت کردن در دنبالهٔ داده شده می‌توان در تمام جملات دنباله از عدد دو فاکتور گرفت. با فاکتورگیری از ۲، به مجموع n عدد اول فرد می‌رسیم و لذا داریم:

$$۲+۶+۱۰+\cdots+(۴n-۲)=۲\big(۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)\big)=۲n^۲$$

$$S_n=a_{۱۳} \Rightarrow ۲n^۲=۵۰ \Rightarrow n^۲=۲۵ \Rightarrow n=۵$$

۱۵ **۱** **روش اول:**

$$a_n=\frac{۱}{۳}n-\frac{۱}{۶} \Rightarrow d=\frac{۱}{۳} \;,\; a_1=\frac{۱}{۳}\times ۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$S_n=\frac{n}{۲}\left(۲\times\frac{۱}{۶}+(n-۱)\times\frac{۱}{۳}\right) \Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}\left(\frac{n}{۳}\right)=\frac{n^۲}{۶} \xrightarrow{S_n=۲۴} \frac{n^۲}{۶}=۲۴ \Rightarrow n^۲=۱۴۴ \Rightarrow n=۱۲$$

روش دوم:

$$a_n=\frac{۱}{۳}n-\frac{۱}{۶} \;,\; a_1=\frac{۱}{۳}\times ۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_1+a_n)=\frac{n}{۲}\left(\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}n-\frac{۱}{۶}\right)=\frac{n^۲}{۶} \xrightarrow{S_n=۲۴} \frac{n^۲}{۶}=۲۴ \Rightarrow n=۱۲$$

۱۶ **۳** **روش اول:** اعداد $۱,۵,۹,\cdots,x$، جملات متوالی دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت ۴ هستند. بنابراین اگر تعداد این جملات برابر با n باشد، داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_1+(n-۱)d) \Rightarrow \frac{n}{۲}(۲\times ۱+(n-۱)\times ۴)=۲۳۱ \Rightarrow ۲n^۲-n-۲۳۱=۰ \xrightarrow[\sqrt{\Delta}=۴۳]{\Delta=۱۸۴۹} n=\frac{۱\pm ۴۳}{۴} \xlongequal{n\in\mathbb{N}} ۱۱$$

$$x=a_{۱۱}=a_1+۱۰d=۱+۱۰\times ۴=۴۱$$

روش دوم: اگر a جملهٔ اول و b جملهٔ nام یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d باشد، تعداد جملات برابر است با $n=\frac{b-a}{d}+۱$.

$$(\text{تعداد جملات})\; n=\frac{x-۱}{۴}+۱=\frac{x+۳}{۴}$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_1+a_n) \Rightarrow \frac{\frac{x+۳}{۴}}{۲}(۱+x)=۲۳۱ \Rightarrow (x+۳)(x+۱)=۱۸۴۸ \xrightarrow{\text{با جایگذاری گزینه‌ها}} x=۴۱$$

۱۷ **۱**

$$d=\frac{a_۳-a_۱}{۳-۱}=\frac{-۲۱-(-۲۷)}{۲}=۳$$

پس جملهٔ عمومی دنباله به صورت $a_n=-۲۷+(n-۱)\times ۳=۳n-۳۰$ است. آخرین جملهٔ منفی را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$a_n<۰ \Rightarrow ۳n-۳۰<۰ \Rightarrow n<۱۰ \Rightarrow n\le ۹$$

بنابراین $a_۹=-۳$، آخرین جملهٔ منفی است. داریم:

$$S_۹=\frac{۹}{۲}(a_۱+a_۹)=\frac{۹}{۲}(-۲۷-۳)=-۱۳۵$$

۱۸ **۴** دنبالهٔ داده شده، دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۴ است. اولین عدد دو رقمی این دنباله عدد ۱۲ است. با فرض $a_۱=۱۲$، آخرین عدد دو رقمی دنباله را به‌دست می‌آوریم:

$$d=۴, a_۱=۱۲ \Rightarrow a_n=۱۲+(n-۱)۴ \Rightarrow a_n=۴n+۸$$

$$a_n<۱۰۰ \Rightarrow ۴n+۸<۱۰۰ \Rightarrow ۴n<۹۲ \Rightarrow n<۲۳ \Rightarrow n\le ۲۲$$

بنابراین $a_{۲۲}$، آخرین جملهٔ دنباله است که دو رقمی می‌باشد. لذا داریم:

$$a_۱=۱۲ \;,\; a_{۲۲}=۹۶ \Rightarrow S_{۲۲}=\frac{۲۲}{۲}(۱۲+۹۶)=۱۱\times ۱۰۸=۱۱۸۸$$

تذکر: در حل این سؤال، سه جملهٔ اول یعنی $a,b,۸$ را حذف کردیم، چون تأثیری در خواستهٔ مسأله نداشتند.

۱۹ **۴** در دنبالهٔ حسابی داده‌شده $d=a_۲-a_۱=۳$ و $a_۱=-۱$ است. حال باید نامعادلهٔ $S_n>۱۲۵$ را حل کنیم. بنابراین:

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d) \xrightarrow[a_۱=-۱]{d=۳} S_n=\frac{n}{۲}(۲\times(-۱)+۳(n-۱)) \Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}(-۲+۳n-۳) \Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}(۳n-۵)$$

$$\xrightarrow{S_n>۱۲۵} \frac{n}{۲}(۳n-۵)>۱۲۵ \xrightarrow{\times ۲} n(۳n-۵)>۲۵۰ \Rightarrow ۳n^۲-۵n-۲۵۰>۰$$

$$۳n^۲-۵n-۲۵۰=۰ \xrightarrow{\sqrt{\Delta}=۵۵} n=\frac{۵\pm ۵۵}{۶} \Rightarrow \begin{cases} n=۱۰ \\ \text{یا} \\ n=-\frac{۲۵}{۳} \end{cases} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{cases} n>۱۰ \Rightarrow n\ge ۱۱ \\ n<-\frac{۲۵}{۳} \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

بنابراین حداقل ۱۱ جمله باید جمع شود.

۲۰ ۲ اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷ را نوشته و با استفاده از فرمول مجموع جملات دنبالهٔ حسابی، جواب را به‌دست می‌آوریم:

$$۱۴,۲۱,۲۸,\cdots,۹۸ \Rightarrow a_۱=۱۴, a_n=۹۸, d=۷$$

$$a_n=a_۱+(n-۱)d \Rightarrow ۹۸=۱۴+(n-۱)۷ \Rightarrow ۸۴=۷n-۷ \Rightarrow ۹۱=۷n \Rightarrow n=۱۳$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n) \Rightarrow S_{۱۳}=\frac{۱۳}{۲}(۱۴+۹۸)=۷۲۸$$

۲۱ ۲ اولین عدد دو رقمی که دارای رقم یکان ۴ باشد، عدد ۱۴ و آخرین عدد دو رقمی با این خاصیت عدد ۹۴ است. قدرنسبت این دنباله ۱۰ می‌باشد (چرا؟) و تعداد این اعداد برابر است با $n=\frac{b-a}{d}+۱=\frac{۹۴-۱۴}{۱۰}+۱=۹$. داریم:

$$S_۹=\frac{۹}{۲}(a_۱+a_۹)=\frac{۹}{۲}(۱۴+۹۴)=۹\times ۵۴=۴۸۶$$

۲۲ ۱ در دستهٔ اول، ۱ جمله، دستهٔ دوم ۲ جمله و ... و در دسته بیستم ۲۰ جمله وجود دارد. بنابراین:

$$\text{تعداد کل جملات تا دستهٔ بیستم}=۱+۲+۳+\cdots+۲۰=\frac{۲۰(۲۰+۱)}{۲}=۲۱۰$$

چون بدون در نظر گرفتن پرانتزها با اعداد طبیعی سروکار داریم، لذا جملهٔ آخر دستهٔ بیستم برابر ۲۱۰ می‌باشد. از طرفی دیگر چون اعداد طبیعی هستند و در دستهٔ بیستم، ۲۰ جمله داریم، دستهٔ بیستم به صورت مقابل است:

$$\underbrace{(۱۹۱,۱۹۲,\cdots,۲۱۰)}_{\text{۲۰ تا جمله}}$$

مجموع جملات این دسته به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(\text{جملهٔ اول}+\text{جملهٔ آخر})=\frac{۲۰}{۲}(۱۹۱+۲۱۰)=۱۰\times ۴۰۱=۴۰۱۰$$

۲۳ ۳ با توجه به جملات داده شده، مشخص می‌شود که آخرین جملهٔ دستهٔ nام، $n^۲$ و اولین جملهٔ آن $(n-۱)^۲+۱$ است. لذا داریم:

$$\text{اعداد دستهٔ ۱۰اُم}=۸۲,\cdots,۱۰۰$$

بنابراین مجموع اعداد از ۸۲ تا ۱۰۰ را باید محاسبه کرد. تعداد این اعداد ۱۹تاست (چرا؟) داریم:

$$S_{۱۹}=\frac{۱۹}{۲}(۱۰۰+۸۲)=۱۹\times ۹۱=۱۷۲۹$$

۲۴ ۳ بدون در نظر گرفتن پرانتزها با اعداد طبیعی فرد سروکار داریم. جملهٔ عمومی مربوط به اعداد طبیعی و فرد به صورت $a_n=۲n-۱$ ظاهر می‌شود (چرا؟) از طرفی دیگر دنبالهٔ مربوط به تعداد جملات هر دسته به صورت $۱,۲,۳,\cdots$ است. بنابراین در دستهٔ سی‌ام، سی جمله وجود دارد. تعداد کل اعداد در سی دستهٔ اول به صورت $۱+۲+\cdots+۳۰=\frac{۳۰(۳۰+۱)}{۲}=۴۶۵$ محاسبه می‌شود. لذا جملهٔ آخر دستهٔ سی‌ام برابر جملهٔ ۴۶۵ ام اعداد طبیعی و فرد می‌باشد. بنابراین:

$$\text{جمله‌ی آخر دسته‌ی سی‌ام}: a_{۴۶۵}=۲(۴۶۵)-۱=۹۲۹$$

حال برای به دست آوردن جملهٔ اول دستهٔ سی‌ام، جملهٔ آخر دستهٔ ۲۹ ام را پیدا کرده و سپس ۲ واحد به آن اضافه می‌کنیم:

$$\text{مجموع تعداد جملات در ۲۹ دسته}: ۱+۲+\cdots+۲۹=\frac{۲۹\times ۳۰}{۲}=۴۳۵$$

لذا جملهٔ آخر دستهٔ ۲۹ ام برابر است با:

$$a_{۴۳۵}=۲(۴۳۵)-۱=۸۶۹ \Rightarrow \text{جملهٔ اول دستهٔ سی‌ام}=۸۶۹+۲=۸۷۱$$

در نتیجه:

$$\text{مجموع جملات اول و آخر دستهٔ سی‌ام}=۸۷۱+۹۲۹=۱۸۰۰$$

۲۵ ۲ ضابطهٔ اعداد طبیعی فرد را به‌صورت $n=۲k-۱$ که در آن $k\in\mathbb{N}$ است، در نظر می‌گیریم.

تعداد اعداد به کار رفته از دستهٔ اول تا آخرین جملهٔ دستهٔ بیستم برابر است با:

$$۱+۲+۳+\ldots+۲۰=\frac{۲۰\times ۲۱}{۲}=۲۱۰$$

پس آخرین جملهٔ دستهٔ بیستم، برابر با ۲۱۰ اُمین عدد طبیعی فرد است که این عدد برابر خواهد بود با:

$$n=۲\times ۲۱۰-۱=۴۱۹$$

۲۶ ۲ با توجه به این‌که $(n>m) S_n-S_m=a_n+a_{n-۱}+\cdots+a_{m+۱}$، لذا داریم:

$$a_۷+a_۸+a_۹ \xrightarrow[m=۶]{n=۹} S_۹-S_۶=(۹^۲+۲\times ۹)-(۶^۲+۲\times ۶)=۹۹-۴۸=۵۱$$

۲۷ ۴

$$S_{۳۵}-S_{۲۴}=\frac{۳۵(۳۵-۳)}{۴}-\frac{۲۴(۲۴-۳)}{۴}=۸\times ۳۵-۶\times ۲۱=۲۸۰-۱۲۶=۱۵۴$$

۲۸ ۴ اگر جملات دنبالهٔ حسابی را با $a_۱, a_۲, \cdots$ نشان دهیم، داریم:

$$a_۷+a_۸+\cdots+a_{۱۷}+a_{۱۸}=S_{۱۸}-S_۶=\frac{۱۸(۱۸-۱۵)}{۶}-\frac{۶(۶-۱۵)}{۶}=۹+۹=۱۸$$

۲۹ ۴ **روش اول:**

$$\left.\begin{array}{l} S_۱=\frac{۱}{۲} \Rightarrow a_۱=\frac{۱}{۲} \quad (*) \\ S_۲=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a_۱+a_۲=\frac{۳}{۲} \xRightarrow{(*)} \frac{۱}{۲}+a_۲=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a_۲=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow d=\frac{۱}{۲} \Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}\left[۲\times\frac{۱}{۲}+(n-۱)\times\frac{۱}{۲}\right] \Rightarrow S_۴=۵$$

روش دوم: با توجه به این‌که مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی به صورت $S_n=\alpha n^2+\beta n$ است، لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S_1=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{1}{2} \\ S_2=\frac{3}{2}\Rightarrow 4\alpha+2\beta=\frac{3}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha=\frac{1}{4}\ ,\ \beta=\frac{1}{4}\Rightarrow S_n=\frac{n^2+n}{4}\Rightarrow S_4=5$$

۳۰ | ۱ مجموع n عدد فرد متوالی با شروع از یک، برابر است با n^2 یا به عبارت دیگر $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. بنابراین داریم:

$$(n+1)^2-n^2=27\Rightarrow 2n+1=27\Rightarrow n=13$$

۳۱ | ۲ **روش اول:**

$$\left.\begin{array}{l} S_6=\frac{6}{2}[2a_1+(6-1)d] \\ S_{10}=\frac{10}{2}[2a_1+(10-1)d]\end{array}\right\}\xrightarrow{S_6=S_{10}} 6a_1+15d=10a_1+45d\Rightarrow 4a_1+30d=0\Rightarrow 2a_1+15d=0\quad (*)$$

$$S_{16}=\frac{16}{2}[2a_1+(16-1)d]=8(2a_1+15d)\overset{(*)}{=\!=}8\times 0=0$$

روش دوم:

$$S_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=S_{10}\xrightarrow{S_6=S_{10}} a_7+a_8+a_9+a_{10}=0\Rightarrow (a_7+a_{10})+(a_8+a_9)=0$$

$$\xrightarrow[8+9=1+16]{7+10=1+16}(a_1+a_{16})+(a_1+a_{16})=0\Rightarrow a_1+a_{16}=0\Rightarrow S_{16}=\frac{16}{2}(a_1+a_{16})=0$$

۳۲ | ۴

$$\frac{S_7}{S_3}=\frac{49}{9}\Rightarrow\frac{\frac{7}{2}(2a_1+6d)}{\frac{3}{2}(2a_1+2d)}=\frac{49}{9}\Rightarrow\frac{a_1+3d}{a_1+d}=\frac{7}{3}\Rightarrow 3a_1+9d=7a_1+7d\Rightarrow d=2a_1\quad (*)$$

$$\frac{a_7}{a_3}=\frac{a_1+6d}{a_1+2d}\overset{(*)}{=\!=}\frac{a_1+6(2a_1)}{a_1+2(2a_1)}=\frac{13a_1}{5a_1}=\frac{13}{5}$$

۳۳ | ۲

مجموع چهار جملهٔ چهارم : $a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{16}=a_1+12d+a_1+13d+a_1+14d+a_1+15d=4a_1+54d$

مجموع چهار جملهٔ دوم : $a_5+a_6+a_7+a_8=a_1+4d+a_1+5d+a_1+6d+a_1+7d=4a_1+22d$

اگر مجموع چهار جملهٔ دوم را از مجموع چهار جملهٔ چهارم کم کنیم، جواب $32d$ می‌شود، لذا داریم:

$$a_2=5+\sqrt{2}\quad ,\quad a_1=3+\sqrt{2}\Rightarrow d=a_2-a_1=2\quad (*)$$

اختلاف مجموع چهار جملهٔ چهارم و چهار جملهٔ دوم $=32d\overset{(*)}{=\!=}32\times 2=64$

۳۴ | ۳ **روش اول:**

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_3\\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=55\end{cases}\Rightarrow a_3=11\\ \begin{cases}a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=5a_8\\ a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=130\end{cases}\Rightarrow a_8=26\end{array}\right.\Rightarrow d=\frac{a_8-a_3}{8-3}=\frac{26-11}{5}=3$$

کوچک‌ترین عدد: $a_3=a_1+2d\Rightarrow 11=a_1+2\times 3\Rightarrow a_1=5$

روش دوم: با توجه به رابطهٔ $a_n=a_m+(n-m)d$، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a_6=a_1+5d\\ a_7=a_2+5d\\ a_8=a_3+5d\\ a_9=a_4+5d\\ a_{10}=a_5+5d\end{array}\right\}\Rightarrow \underbrace{a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}}_{130}\underset{=}{=}\underbrace{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}_{55}\underset{+25d}{+25d}\Rightarrow d=3\quad (*)$$

$$S_5=\frac{5}{2}[2a_1+(5-1)d]\xrightarrow{(*)}55=\frac{5}{2}[2a_1+4\times 3]\Rightarrow a_1=5$$

روش سوم:

$$\begin{cases} S_5 = 55 \\ S_{10} = 55 + 130 = 185 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 55 \\ \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 185 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 4d = 22 \\ 2a_1 + 9d = 37 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 5, d = 3$$

۳۵ ۲

$$\begin{cases} S_4 = 15 \\ S_9 = 15 + 30 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) = 15 \\ \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3d = 7/5 \\ 2a_1 + 8d = 10 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \;,\; a_1 = 3 \quad (*)$$

$$a_{11} = a_1 + 10d \overset{(*)}{\Longrightarrow} 3 + 10 \times \frac{1}{2} = 8$$

۳۶ ۳ با فرض این‌که دنبالهٔ ذکر شده دارای n جمله است، داریم:

$$\begin{cases} \text{مجموع سه جملهٔ اول}: a_1 + a_2 + a_3 = 12 \\ \text{مجموع سه جملهٔ آخر}: a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 66 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین تساوی‌ها}} a_1 + a_2 + a_3 + a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 78$$

$$\xrightarrow{\text{دسته‌بندی}} (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 78 \quad (*)$$

از طرفی دیگر می‌دانیم در دنبالهٔ حسابی $\{a_n\}$، برای هر p ، q ، n و m که در رابطهٔ $p + q = n + m$ صدق کنند، داریم:

$$a_n + a_m = a_p + a_q$$

در نتیجه:

$$1 + n = 2 + (n-1) = 3 + (n-2) \Rightarrow a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2}$$

حال با توجه به رابطهٔ $(*)$ می‌توان نوشت:

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 78 \Rightarrow 3(a_1 + a_n) = 78 \Rightarrow a_1 + a_n = 26$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \xrightarrow[a_1 + a_n = 26]{S_n = 117} 117 = \frac{n}{2} \times 26 \Rightarrow n = 9$$

۳۷ ۲

$$\overbrace{S_{12} - S_6}^{\text{مجموع جملات هفتم تا دوازدهم}} = S_3 + 36 \Rightarrow \frac{12(2a_1 + 11d)}{2} - \frac{6(2a_1 + 5d)}{2} = \frac{3(2a_1 + 2d)}{2} + 36 \Rightarrow 8a_1 + 44d - 4a_1 - 10d = 2a_1 + 2d + 24$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 32d = 24 \xrightarrow{\div 2} \overbrace{a_1 + 16d}^{a_{17}} = 12 \Rightarrow a_{17} = 12$$

۳۸ ۳ روش اول:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{3}(a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}) \Rightarrow \frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}(a_1 + a_5) = \frac{1}{3}\left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{2}}(a_6 + a_{10})\right)$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 3a_5 = a_6 + a_{10} \Rightarrow 3a_1 + 3(a_1 + 4d) = (a_1 + 5d) + (a_1 + 9d) \Rightarrow 4a_1 = 2d \Rightarrow d = 2a_1$$

$$\Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} \overset{d = 2a_1}{=\!=} \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

روش دوم:

$$S_5 = \frac{1}{3}(S_{10} - S_5) \Rightarrow 3S_5 = S_{10} - S_5 \Rightarrow 4S_5 = S_{10} \Rightarrow 4 \times \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) \Rightarrow 4a_1 + 8d = 2a_1 + 9d \Rightarrow 2a_1 = d$$

$$\Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} \overset{d = 2a_1}{=\!=} \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

۳۹ ۲ دنبالهٔ داده شده را صعودی یا نزولی فرض کنیم، هیچ تفاوتی در حل سؤال ندارد. برای راحتی محاسبه، دنباله را صعودی در نظر می‌گیریم. در این صورت a_1 کوچک‌ترین جمله و a_5 بزرگ‌ترین جمله است. داریم:

$$\begin{cases} S_5 = 105 \Rightarrow \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = 105 \Rightarrow a_1 + 2d = 21 \\ a_3 + a_4 + a_5 = 6(a_1 + a_2) \Rightarrow a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d = 6(a_1 + a_1 + d) \Rightarrow 3a_1 + 9d = 12a_1 + 6d \Rightarrow d = 3a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 21 \\ d = 3a_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 3 \;,\; d = 9 \Rightarrow a_5 = a_1 + 4d = 3 + 4 \times 9 = 39$$

تذکر: اگر جملات دنباله را نزولی در نظر می‌گرفتیم، در این صورت a_1 بزرگ‌ترین جملهٔ دنباله بود.

۴۰ **۱**

$$\begin{array}{l} a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=150 \\ -\ a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=135 \\ \hline (a_2-a_1)+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)+\cdots+(a_{20}-a_{19})=15 \Rightarrow d+d+d+\cdots+d=15 \Rightarrow 10d=15 \Rightarrow d=1/5 \quad (*) \end{array}$$

از طرف دیگر می‌دانیم $S_{20}=150+135=285$، داریم:

$$S_{20}=\frac{20}{2}(2a_1+19d) \overset{(*)}{\Longrightarrow} 135+150=10(2a_1+19\times 1/5) \Rightarrow 285=20a_1+285 \Rightarrow a_1=0$$

۴۱ **۴** می‌دانیم اگر a جملهٔ اول و b جملهٔ آخر یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d باشد، تعداد جملات از رابطهٔ $n=\frac{b-a}{d}+1$ حاصل می‌شود. حال با توجه به این توضیحات و صورت تست به حل مسئله می‌پردازیم.

تعداد اعداد زوج، شروع از ۵۰ و ختم به ۱۲۰:

$$n=\frac{b-a}{d}+1 \xrightarrow[d=2]{a=50,b=120} n=\frac{120-50}{2}+1 \Rightarrow n=36$$

تعداد اعداد فرد، شروع از ۵۱ و ختم به ۱۱۹:

$$n=\frac{b-a}{d}+1 \xrightarrow[d=2]{a=51,b=119} n=\frac{119-51}{2}+1 \Rightarrow n=35$$

بنابراین:

$$S_{36}=\frac{36}{2}[2(50)+(36-1)\times 2]=3060$$

$$S_{35}=\frac{35}{2}[2(51)+(35-1)\times 2]=2975$$

در نتیجه:

$$S_{36}-S_{35}=3060-2975=85$$

۴۲ **۱** دنبالهٔ حسابی با ۲۰ جمله، قدرنسبت d و جملهٔ اول ۳-:

$$-3, a_2, a_3, \cdots, a_{20}$$

از حذف جملات با شمارهٔ زوج، دنبالهٔ زیر با قدرنسبت 2d حاصل می‌شود:

$$-3, a_3, a_5, \cdots, a_{19}$$

مجموع ۲۰ جمله با قدرنسبت d :

$$S_{20}=\frac{20}{2}[2(-3)+19d]=10(-6+19d)$$

مجموع ۱۰ جمله با قدرنسبت 2d:

$$S_{10}=\frac{10}{2}[2(-3)+9(2d)]=5(-6+18d)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{10}}{S_{20}}=\frac{5(-6+18d)}{10(-6+19d)}=\frac{1}{3} \Rightarrow -18+54d=-12+38d \Rightarrow d=\frac{3}{8}$$

در نتیجه:

$$a_{25}=a_1+24d=-3+24\times\frac{3}{8}=-3+9=6$$

۴۳ **۴** در دنبالهٔ حسابی $\{a_n\}$ اگر به جملهٔ اول a' و به قدرنسبت d' واحد اضافه شود، آن‌گاه تغییرات مجموع n جملهٔ اول برابر است با $\Delta S_n=\frac{n}{2}[2a'+(n-1)d']$. در این‌جا $a'=0$، $d'=+1$ و $n=20$ است، بنابراین:

$$\Delta S_{20}=\frac{20}{2}[2(0)+(20-1)(1)]=190$$

۴۴ **۳** در این‌جا $n=20$، $a'=+3$ و $d'=-2$ است، بنابراین:

$$\Delta S_{20}=\frac{20}{2}\left(2\times 3+(20-1)(-2)\right)=10\times(-32)=-320 \Rightarrow \text{۳۲۰ واحد کاهش}$$

۴۵ **۱** می‌دانیم اگر a_n و b_n دو دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت‌های d_1 و d_2 باشند، جملات مشترک دو دنباله در صورت وجود، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d می‌سازند که در آن d، کوچک‌ترین مضرب مشترک d_1 و d_2 است.

$$\begin{cases} -1,5,11,\cdots \Rightarrow d_1=6 \\ 1,5,9,\cdots \Rightarrow d_2=4 \end{cases} \Rightarrow d=\text{ک.م.م دو عدد } 6,4=12$$

بنابراین جملات مشترک دو دنباله، جملات دنباله‌ای حسابی با جملهٔ اول ۵ و قدرنسبت ۱۲ هستند. داریم:

$$S_{20}=\frac{20}{2}\left(2\times 5+(20-1)12\right)=10\times(10+228)=2380$$

۴۶ **۲** تعداد کالاهای تولیدی تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۹۰ و جملهٔ اول ۸۰۰ می‌دهند. داریم:

$$S_4=\frac{4}{2}\left(2\times 800+(4-1)\times 90\right)=2(1600+270)=3740$$

۴۷ **۲** پول دریافتی سعید در ماه‌های متوالی، یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۱۰۰۰۰ و قدرنسبت ۲۰۰۰ تشکیل می‌دهند. داریم:

$$\begin{cases} S_n=\frac{n}{۲}[۲\times ۱۰۰۰۰+(n-۱)\times ۲۰۰۰] \\ S_n=۴۰۰۰۰۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{n}{۲}(۲۰۰۰۰+(n-۱)۲۰۰۰)=۴۰۰۰۰۰ \Rightarrow n^۲+۹n=۴۰۰ \Rightarrow n^۲+۹n-۴۰۰=۰$$

$$\Rightarrow (n-۱۶)(n+۲۵)=۰ \Rightarrow n=۱۶$$

۴۸ **۲**

$$\begin{cases} a_۱=۸۰۰ \\ d=-۲۵ \end{cases} \Rightarrow S_n=\frac{n}{۲}(۲\times ۸۰۰+(n-۱)(-۲۵)) \xrightarrow{S_n=۵۷۰۰} ۵۷۰۰=\frac{n}{۲}(-۲۵n+۱۶۲۵) \Rightarrow n^۲-۶۵n+۴۵۶=۰ \Rightarrow n=۸$$

۴۹ **۳** طول پله‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۴۵ و جملهٔ آخر ۳۰ می‌دهند. داریم:

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n) \Rightarrow \frac{n}{۲}(۳۰+۴۵)=۴۵۰ \Rightarrow n=۱۲$$

۵۰ **۲** اگر زاویه‌های n ضلعی محدب را $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\cdots$ و α_n در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{مجموع زوایای n ضلعی محدب}=(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$$

$$\text{مجموع زوایای n ضلعی محدب}=\alpha_۱+\alpha_۱+\cdots+\alpha_n=\frac{n}{۲}(\alpha_۱+\alpha_n) \xrightarrow[\alpha_n=۱۵۸^\circ]{\alpha_۱=۱۴۲^\circ} \frac{n}{۲}(۱۴۲^\circ+۱۵۸^\circ)$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$(n-۲)\times ۱۸۰^\circ=\frac{n}{۲}(۳۰۰^\circ) \Rightarrow (n-۲)\times ۱۸۰^\circ=n\times ۱۵۰^\circ \Rightarrow n=۱۲$$

۵۱ **۲** اگر a_n جملهٔ عمومی مساحت مثلث‌ها باشد، آن‌گاه طبق مفروضات صورت تست داریم:

$$\begin{cases} n=۵ \\ S_۵=۱۰۵ \\ a_۳=\frac{۱}{۲}(۷/۵)h \quad (*) \end{cases} \Rightarrow ۱۰۵=\frac{۵}{۲}[۲a_۱+(۵-۱)d] \Rightarrow ۱۰۵=\frac{۵}{۲}(۲a_۱+۴d)$$

$$\Rightarrow ۴۲=۲a_۱+۴d \xrightarrow{\div ۲} a_۱+۲d=۲۱ \xrightarrow[(*)]{a_۳=a_۱+۲d} \frac{۱}{۲}(۷/۵)h=۲۱ \Rightarrow h=۵/۶$$

۵۲ **۲** دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت $۴=۲+۲$ متر، برای توپ دوم باید مسافت $۸=(۲+۲)۲$ متر و برای توپ سوم $۱۲=(۲+۲+۲)۲$ متر و ... را طی کند. بنابراین مسافت‌های طی شده در هر مرحله، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول ۴ و قدرنسبت ۴ می‌دهند، ضمناً n تعداد توپ‌های انداخته شده در سبد است. مجموع جملات دنبالهٔ فوق همان مسافت کل طی شده توسط دونده است. یعنی ۴۸۰ متر:

$$۴,۸,۱۲,\cdots \Rightarrow a_۱=۴, d=۴$$

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d] \Rightarrow ۴۸۰=\frac{n}{۲}(۸+۴n-۴) \Rightarrow n(n+۱)=۲۴۰ \Rightarrow n(n+۱)=۱۵\times ۱۶ \Rightarrow n=۱۵$$

۵۳ **۲** اگر a جملهٔ mام و b جملهٔ nام یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q باشد، در این صورت $q^{(n-m)}=\frac{b}{a}$ است. با توجه به جملات داده شده، ۲ جملهٔ اول و $\frac{۱}{۲}$ جملهٔ سوم است. داریم:

$$q^{(۳-۱)}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۲} \Rightarrow q^۲=\frac{۱}{۴} \Rightarrow q=\pm\frac{۱}{۲}$$

با فرض $q=\frac{۱}{۲}$، جملات دنبالهٔ هندسی به صورت $۲,۱,\frac{۱}{۲},\cdots$ می‌شوند که مرتباً کاهش می‌یابند، بنابراین قابل قبول نیست. لذا $q=-\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. داریم:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} \xrightarrow[q=-\frac{۱}{۲}]{a_۱=۲,n=۶} S_۶=\frac{۲\left(۱-\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۶\right)}{۱-\left(-\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{۲-\frac{۱}{۳۲}}{\frac{۳}{۲}}=\frac{۶۴-۱}{۴۸}=\frac{۶۳}{۴۸}=\frac{۲۱}{۱۶}$$

۵۴ **۳** اگر بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{۲}$، شش عدد قرار دهیم که هشت عدد تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند، در این صورت $a_۱=۲$ و $a_۸=۱۶\sqrt{۲}$ است. لذا داریم:

$$q^{(۸-۱)}=\frac{۱۶\sqrt{۲}}{۲}=q^۷=۸\sqrt{۲}=(\sqrt{۲})^۷ \Rightarrow q=\sqrt{۲}$$

بنابراین مجموع هشت جملهٔ دنباله‌ای هندسی با جملهٔ اول ۲ و قدرنسبت $\sqrt{۲}$ را باید به‌دست آوریم. داریم:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} \xrightarrow[n=۸]{a_۱=۲,q=\sqrt{۲}} S_۸=\frac{۲(۱-(\sqrt{۲})^۸)}{۱-\sqrt{۲}}=\frac{۲-۳۲}{۱-\sqrt{۲}}=\frac{۳۰}{\sqrt{۲}-۱} \Rightarrow S_۸=۳۰(\sqrt{۲}+۱)$$

۵۵ **۲** جملهٔ اول را $a_۱=۴$ و در نتیجه جملهٔ پنجم را برابر $a_۵=۳۲۴$ در نظر می‌گیریم. با توجه به صورت سؤال، این پنج جمله، مثبت هستند، یعنی $q>۰$ و داریم:

$$a_۵=a_۱q^۴ \Rightarrow q^۴=\frac{۳۲۴}{۴}=۸۱ \xrightarrow{q>۰} q=۳$$

مجموع این پنج جمله برابر است با:

$$S_۵=a_۱+a_۱q+\cdots+a_۱q^۴=a_۱(۱+q+\cdots+q^۴)=a_۱\left(\frac{q^۵-۱}{q-۱}\right)\Rightarrow S_۵=۴\left(\frac{۳^۵-۱}{۳-۱}\right)=۴\times\frac{۲۴۳-۱}{۲}=۴۸۴$$

۵۶ **۴**

$$q^{۳-۱}=\frac{a_۳}{a_۱}=\frac{۹}{۴}\Rightarrow q_۱=\frac{۳}{۲} \text{ یا } q_۲=-\frac{۳}{۲}$$

با توجه به این‌که جملات دنباله مرتباً افزایش می‌یابند، لذا $q=\frac{۳}{۲}$ قابل قبول است و داریم:

$$S_۶=\frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q}=\frac{۴\left(۱-\left(\frac{۳}{۲}\right)^۶\right)}{۱-\frac{۳}{۲}}=\frac{۳^۶-۲^۶}{۸}=\frac{۶۶۵}{۸}=۸۳\frac{۱}{۸}$$

۵۷ **۴** می‌دانیم اگر a، b و c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $b^۲=ac$. حال شرط متوالی بودن سه جملهٔ دنبالهٔ هندسی را برای این اعداد لحاظ می‌کنیم. داریم:

$$(۲x)^۲=(x^۲+۴)(x^۲-۲)\Rightarrow ۴x^۲=x^۴+۲x^۲-۸\Rightarrow x^۴-۲x^۲-۸=۰$$

$$\xrightarrow[\text{برحسب } x^۲]{\text{تجزیه با اتحاد جمله مشترک}} (x^۲-۴)(x^۲+۲)=۰\Rightarrow \begin{cases} x^۲=-۲ & \text{غ‌ق‌ق} \\ x^۲=۴\Rightarrow x=\pm ۲ \end{cases}$$

حالا اگر $x=۲$ و $x=-۲$ را در سه جملهٔ داده شده جایگزین کنیم، مشاهده می‌شود که فقط به ازای $x=۲$ یک دنبالهٔ هندسی نزولی حاصل می‌شود:

$$x=۲\Rightarrow ۸,۴,۲,\cdots$$

به ازای $x=-۲$، دنباله، نه نزولی و نه صعودی می‌باشد. بنابراین یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_۱=۸$ و قدرنسبت $q=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$ داریم که می‌توان مجموع هفت جملهٔ اول آن را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}\Rightarrow S_۷=۸\times\frac{۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^۷}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱۶\left(۱-\frac{۱}{۱۲۸}\right)=\frac{۱۲۷}{۸}$$

۵۸ **۲**

$$S_n=\frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}\Rightarrow S_n=\frac{a_۱-\overbrace{a_۱\times q^n}^{a_{n+۱}}}{۱-q}\Rightarrow S_n=\frac{a_۱-a_{n+۱}}{۱-q}\xrightarrow{n=۱۰}S_{۱۰}=\frac{a_۱-a_{۱۱}}{۱-q}$$

$$\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{-(a_{۱۱}-a_۱)}{-(q-۱)}\Rightarrow S_{۱۰}=\frac{a_{۱۱}-a_۱}{q-۱}\xrightarrow[a_{۱۱}-a_۱=۴۰]{S_{۱۰}=۲۰}۲۰=\frac{۴۰}{q-۱}\Rightarrow q=۳$$

۵۹ **۲** عبارت A را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب دو عبارت دیگر در نظر گرفت:

$$A=\underbrace{(۱+x+x^۲+\cdots+x^۸)}_{A_۱}\underbrace{(۱-x+x^۲-\cdots+x^۸)}_{A_۲}$$

$A_۱$ مجموع ۹ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت x است و $A_۲$ مجموع ۹ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $-x$ است. لذا داریم:

$$A=A_۱\times A_۲=\frac{۱(۱-x^۹)}{۱-x}\times\frac{۱(۱-(-x)^۹)}{۱-(-x)}=\frac{(۱-x^۹)(۱+x^۹)}{(۱-x)(۱+x)}=\frac{۱-x^{۱۸}}{۱-x^۲}$$

با جایگذاری $x=\sqrt{۲}$ در عبارت به‌دست آمده داریم:

$$x=\sqrt{۲}\Rightarrow A=\frac{۱-(\sqrt{۲})^{۱۸}}{۱-(\sqrt{۲})^۲}=\frac{۱-۲^۹}{۱-۲}=۵۱۱$$

۶۰ **۱** صورت، مجموع ۱۲ جملهٔ یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت t است، پس:

$$\text{صورت}=\frac{۱(۱-t^{۱۲})}{۱-t}=\frac{۱-t^{۱۲}}{۱-t}$$

مخرج، مجموع ۴ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $(t^۳)$ است، پس:

$$\text{مخرج}=\frac{۱(۱-(t^۳)^۴)}{۱-t^۳}=\frac{۱-t^{۱۲}}{۱-t^۳}\Rightarrow \text{حاصل کسر}=\frac{\frac{۱-t^{۱۲}}{۱-t}}{\frac{۱-t^{۱۲}}{۱-t^۳}}=\frac{۱-t^۳}{۱-t}=\frac{(۱-t)(۱+t+t^۲)}{(۱-t)}=۱+t+t^۲$$

حال باید حاصل این عبارت را به ازای $t=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$ به‌دست آوریم:

$$\text{حاصل عبارت}=\underbrace{۱+\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}}_{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}}+\left(\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۲}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۱+۵-۲\sqrt{۵}}{۴}=\frac{۲+۲\sqrt{۵}+۶-۲\sqrt{۵}}{۴}=\frac{۸}{۴}=۲$$

۶۱ **۳** صورت، مجموع ۹ جملهٔ یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $(-t)$ است، پس:

$$\text{صورت}=\frac{۱(۱-(-t)^{۹})}{۱-(-t)}=\frac{۱+t^{۹}}{۱+t}$$

مخرج، مجموع سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $(-t^{۳})$ است، پس:

$$\text{مخرج}=\frac{۱(۱-(-t^{۳})^{۳})}{۱-(-t^{۳})}=\frac{۱+t^{۹}}{۱+t^{۳}}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل کسر}=\frac{\frac{\cancel{۱+t^{۹}}}{۱+t}}{\frac{\cancel{۱+t^{۹}}}{۱+t^{۳}}}=\frac{\overbrace{۱+t^{۳}}^{\text{چاق و لاغر}}}{۱+t}=\frac{(t+۱)(t^{۲}-t+۱)}{t+۱}=t^{۲}-t+۱$$

با قرار دادن مقدار $t=\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$، حاصل کسر به‌دست می‌آید:

$$\text{حاصل کسر}=\left(\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}\right)+۱=\frac{۱+۲\sqrt{۱۷}+۱۷}{۴}-\frac{۲+۲\sqrt{۱۷}}{۴}+\frac{۴}{۴}=\frac{۲۰}{۴}=۵$$

۶۲ **۴**

$$x^{۶}-x^{۵}y+x^{۴}y^{۲}-x^{۳}y^{۳}+\dots+y^{۶}\xrightarrow{\text{فاکتور از } x^{۶}}x^{۶}\left(۱-\frac{y}{x}+\frac{y^{۲}}{x^{۲}}-\frac{y^{۳}}{x^{۳}}+\dots+\frac{y^{۶}}{x^{۶}}\right)$$

داخل پرانتز، دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۱ و قدرنسبت $(-\frac{y}{x})$ است که از دستور مجموع جملات $S_n=\frac{a_{۱}(۱-q^{n})}{۱-q}$ قابل محاسبه می‌باشد. بنابراین:

$$\text{حاصل عبارت}\xrightarrow{n=۷}x^{۶}\times\left(\frac{۱(۱-(-\frac{y}{x})^{۷})}{۱-(-\frac{y}{x})}\right)=x^{۶}\times\frac{۱+\frac{y^{۷}}{x^{۷}}}{۱+\frac{y}{x}}=x^{۶}\times\frac{\frac{x^{۷}+y^{۷}}{x^{۷}}}{\frac{x+y}{x}}=x^{۶}\times\frac{x(x^{۷}+y^{۷})}{x^{۷}(x+y)}=\frac{x^{۷}+y^{۷}}{x+y}$$

۶۳ **۱** اعداد $۶,-۱۲,۲۴,\dots$، جملات یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۶ و قدرنسبت ۲- است، لذا برای مجموع n جملهٔ آن داریم:

$$S_n=\frac{a_{۱}(۱-q^{n})}{۱-q}\xRightarrow[q=-۲]{a_{۱}=۶}S_n=\frac{۶(۱-(-۲)^{n})}{۱-(-۲)}=-۲((-۲)^{n}-۱)\quad(*)$$

$$S_n=۱۰۲۶\xRightarrow{(*)}-۲((-۲)^{n}-۱)=۱۰۲۶\Rightarrow(-۲)^{n}-۱=-۵۱۳\Rightarrow(-۲)^{n}=-۵۱۲\Rightarrow n=۹$$

۶۴ **۳** عبارت (هر جمله $\frac{۲}{۳}$ جمله قبلی است)، یعنی هر جمله در عدد $\frac{۲}{۳}$ ضرب می‌شود، تا جملهٔ بعدی ساخته شود. پس قدرنسبت دنباله (q) برابر $\frac{۲}{۳}$ است، در دنبالهٔ هندسی مجموع جملات از رابطهٔ $S_n=\frac{a_{۱}(q^{n}-۱)}{q-۱}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{۲۱۱}{۲۷}=\frac{a_{۱}((\frac{۲}{۳})^{۵}-۱)}{\frac{۲}{۳}-۱}\Rightarrow\frac{۲۱۱}{۲۷}=\frac{a_{۱}(\frac{۳۲}{۲۴۳}-۱)}{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow\frac{۲۱۱}{۲۷}=\frac{a_{۱}(-\frac{۲۱۱}{۲۴۳})}{-\frac{۱}{۳}}\Rightarrow\frac{۱}{۲۷}=\frac{a_{۱}}{۸۱}\Rightarrow۲۷a_{۱}=۸۱\Rightarrow a_{۱}=\frac{۸۱}{۲۷}=۳$$

۶۵ **۴** می‌دانیم $S_n=\frac{a_{۱}-a_{n+۱}}{۱-q}$ می‌باشد. از طرفی جملهٔ اول دو واحد کم‌تر از جملهٔ پنجم است، یعنی $a_{۱}=a_{۵}-۲$. داریم:

$$a_{۱}=a_{۵}-۲\Rightarrow a_{۱}-a_{۵}=-۲$$

$$S_{۴}=\frac{a_{۱}-a_{۵}}{۱-q}\Rightarrow۶=\frac{-۲}{۱-q}\Rightarrow۱-q=-\frac{۲}{۶}\Rightarrow q=\frac{۴}{۳}$$

۶۶ **۴**

$$\frac{a_{۱}(q^{۱۹}-۱)}{q-۱}-\frac{a_{۱}(q^{۱۰}-۱)}{q-۱}=۶۴۰\xRightarrow{q=۲}\frac{۲^{۱۹}a_{۱}-a_{۱}}{۱}-\frac{۲^{۱۰}a_{۱}-a_{۱}}{۱}=۶۴۰\Rightarrow(۲^{۱۹}-۲^{۱۰})a_{۱}=۶۴۰$$

$$\Rightarrow(۲^{۹}-۱)a_{۱}=\frac{۶۴۰}{۲^{۱۰}}=\frac{۵}{۸}\ (*)$$

$$S_{۹}=\frac{a_{۱}(q^{۹}-۱)}{q-۱}\overset{q=۲}{=}\frac{a_{۱}(۲^{۹}-۱)}{۲-۱}=a_{۱}(۲^{۹}-۱)\overset{(*)}{=}\frac{۵}{۸}$$

۶۷ ۴

۶۸ ۱

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=q^n+1\Rightarrow\frac{S_6}{S_3}=\frac{S_{2\times3}}{S_3}=q^3+1\xRightarrow{q=2}\frac{S_6}{S_3}=9$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=q^n+1\Rightarrow\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{S_{2\times5}}{S_5}=q^5+1\quad(*)$$

$$\frac{S_{10}}{S_5}=4\sqrt{2}+1\xRightarrow{(*)}4\sqrt{2}+1=q^5+1\Rightarrow q^5=4\sqrt{2}=(\sqrt{2})^5\Rightarrow q=\sqrt{2}\quad(**)$$

$$\frac{S_8}{S_4}=\frac{S_{2\times4}}{S_4}=q^4+1\overset{(**)}{=\!=}(\sqrt{2})^4+1=5$$

۶۹ ۴ **روش اول:** در دنبالهٔ هندسی ...,۱,۲,۴، جملهٔ اول برابر ۱ و قدرنسبت $q=2$ می‌باشد. مجموع n جملهٔ اول تصاعد هندسی با قدرنسبت q و جملهٔ اول a_1، برابر با $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)}$ می‌باشد. بنابراین:

$$S_{14}=\frac{1\times(1-2^{14})}{1-2}=2^{14}-1\ ,\ S_7=\frac{1\times(1-2^7)}{1-2}=2^7-1\Rightarrow\frac{S_{14}}{S_7}=\frac{2^{14}-1}{2^7-1}=\frac{(2^7-1)(2^7+1)}{2^7-1}=2^7+1=129$$

روش دوم: در دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت q، داریم $\frac{S_{2n}}{S_n}=q^n+1$. بنابراین:

$$q=2\Rightarrow\frac{S_{2\times7}}{S_7}=2^7+1=129$$

۷۰ ۴ اگر S_n مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی باشد، در این صورت رابطهٔ $\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}=q^n$ برقرار است.

$$\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}=q^n\xRightarrow{n=3}\frac{S_6-S_3}{S_3}=q^3\xRightarrow[S_3=136]{S_6=153}q^3=\frac{153-136}{136}=\frac{1}{8}\Rightarrow q=\frac{1}{2}\quad(*)$$

$$\frac{a_1}{a_5}=\frac{a_1}{a_1q^4}=q^{-4}\overset{(*)}{=\!=}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=2^4=16$$

۷۱ ۱ S_5 مجموع ۵ جملهٔ اول و $S_{10}-S_5$، مجموع ۵ جملهٔ دوم است. داریم:

$$\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}=q^n\Rightarrow\frac{S_5}{S_{10}-S_5}=q^{-5}$$

با توجه به این‌که در دنبالهٔ $\cdots,\frac{1}{2},2$، قدرنسبت برابر با $\frac{1}{4}$ است. داریم:

$$\frac{S_5}{S_{10}-S_5}=q^{-5}\Rightarrow\frac{S_5}{S_{10}-S_5}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-5}=4^5=2^{10}$$

۷۲ ۱ مقدار پول دریافتی کارگر در روزهای متوالی، دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۳۲۰ و قدرنسبت $\frac{3}{2}$ است. داریم:

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\xRightarrow[q=\frac{3}{2}]{a_1=320,\,n=6}S_6=\frac{320\left(1-\left(\frac{3}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{3}{2}}=6650$$

۷۳ ۳ مقدار درصدی که در هر مرحله رنگ می‌کنیم، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۵۰ و قدرنسبت $\frac{1}{2}$است. می‌خواهیم بدانیم حداقل مقدار n، برای آن‌که $S_n\geq 90$ باشد کدام است. داریم:

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}\xRightarrow[q=\frac{1}{2}]{a=50}S_n=\frac{50\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}\geq 90\Rightarrow 100\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\geq 90\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^n\leq\frac{1}{10}\Rightarrow 2^n\geq 10\xRightarrow{n\in\mathbb{N}}n\geq 4$$

۷۴ ۴ اولین لایه مواد مضر را نصف می‌کند. دومین لایه از نیم باقی‌مانده، نیمی از مواد مضر یعنی $\frac{1}{4}$مواد مضر را برطرف می‌کند و .... که این دنبالهٔ اعداد به صورت زیر ظاهر می‌شود:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots,\frac{1}{2^n}$$

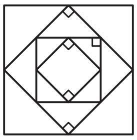
این یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ می‌باشد. حال می‌خواهیم بدانیم که چند جمله از جملات این دنباله با هم جمع شود تا حاصل حداقل ۹۹ درصد شود، یعنی باید نامعادلهٔ $S_n\geq\frac{99}{100}$ را حل کنیم:

$$S_n\geq\frac{99}{100}\Rightarrow\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\geq\frac{99}{100}\xRightarrow{a_1=\frac{1}{2},q=\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\geq\frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq\frac{99}{100}\Rightarrow 1-\frac{1}{2^n}\geq\frac{99}{100}\Rightarrow-\frac{1}{2^n}\geq-\frac{1}{100}\xRightarrow{\times(-1)}\frac{1}{2^n}\leq\frac{1}{100}\Rightarrow 2^n\geq 100$$

با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادله اخیر و این‌که $2^7=128$ در می‌یابیم که حداقل مقدار n برابر ۷ خواهد بود. لذا تعداد لایه‌ها باید حداقل ۷ تا باشد.

۷۵ **۱** وقتی وسط اضلاع یک مربع را به هم وصل می‌کنیم، مربعی به وجود می‌آید که مساحت آن نصف مساحت مربع اولیه است. مساحت مربع اولیه را S در نظر می‌گیریم. بنابراین داریم:



$$\text{مجموع مساحت مربع‌های به وجود آمده} = \frac{S}{2}+\frac{S}{4}+\cdots+\frac{S}{2^n} \xrightarrow[q=\frac{1}{2}]{a_1=\frac{S}{2}} \frac{\frac{S}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \cancel{S}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) > \frac{99}{100}\cancel{S}$$

$$\xRightarrow{S>0} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{99}{100} \Rightarrow 1-\frac{99}{100} > \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow n \ge 7$$

بنابراین حداقل ۷ مرتبه باید این کار را انجام دهیم.

۷۶ **۱**

$$\frac{a+5}{a-1}-\frac{6}{a^2+a+1}-\frac{6(a^2+2)}{a^3-1}=\frac{a+5}{a-1}-\frac{6}{a^2+a+1}-\frac{6(a^2+2)}{(a-1)(a^2+a+1)}=\frac{(a+5)(a^2+a+1)-6(a-1)-6a^2-12}{(a-1)(a^2+a+1)}$$

$$=\frac{a^3+a^2+a+5a^2+5a+5-6a+6-6a^2-12}{(a-1)(a^2+a+1)}=\frac{a^3-1}{(a-1)(a^2+a+1)}=1$$

۷۷ **۲** می‌دانیم اگر n عددی فرد باشد، در این‌صورت $a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+a^{n-3}-\cdots+1)$. بنابراین داریم:

$$A=\frac{(1-x+x^2-x^3+x^4)(1+x)}{x^{10}-1}=\frac{1+x^5}{x^{10}-1}=\frac{1+x^5}{(x^5-1)(x^5+1)} \Rightarrow A=\frac{1}{x^5-1} \xRightarrow{\text{مقدار } A \text{ به ازای } x=2} A(2)=\frac{1}{31}$$

۷۸ **۴** اگر n یک عدد طبیعی باشد، اتحاد زیر برقرار است:

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)$$

و در صورتی که n یک عدد طبیعی فرد باشد، اتحاد زیر برقرار است:

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots-a+1)$$

باتوجه به اتحاد بالا، a^6+1 را نمی‌توان به صورتی که در گزینهٔ (۴) گفته شده تجزیه کرد. برای تجزیهٔ آن با استفاده از اتحادهای بالا به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$a^6+1=(a^2)^3+1=(a^2+1)((a^2)^2-a^2+1)=(a^2+1)(a^4-a^2+1)$$

۷۹ **۱** با توجه به رابطهٔ $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots+y^{n-1})$، داریم:

$$(x^3-x^2+2)^3-(x^3-2x+3)^3=\left((x^3-x^2+2)-(x^3-2x+3)\right)(\ldots)=(-x^2+2x-1)(\ldots.)=-(x-1)^2(\ldots)$$

پس این عبارت بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است و می‌توان اثبات کرد که بر سایر گزینه‌ها بخش‌پذیر نیست. (به عنوان تمرین بر عهدهٔ خودتان)

۸۰ **۳**

$$A=x^9-x^3y^3=x^3(x^6-y^3)=x^3\left((x^2)^3-y^3\right)=x^3(x^2-y)(x^4+x^2y+y^2)$$

بنابراین به راحتی دیده می‌شود که در تجزیه این عبارت $x^4-x^2y+y^2$ وجود ندارد.

۸۱ **۳** اگر کوچک‌ترین عدد را x بنامیم، داریم:

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2=77 \Rightarrow x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4=77 \Rightarrow 3x^2+6x-72=0$$

$\Rightarrow x^2+2x-24=0 \Rightarrow (x-4)(x+6)=0 \Rightarrow x=4$ یا $x=-6 \Rightarrow x=4$ قابل قبول است.

۸۲ **۳** x و $x+7$ دو ضلع قائمه و $x+8$ وتر است. داریم:

$(x+8)^2=x^2+(x+7)^2 \Rightarrow x^2+16x+64=x^2+x^2+14x+49 \Rightarrow x^2-2x-15=0 \Rightarrow x=5$ یا $x=-3$

بنابراین طول اضلاع مثلث ۵، ۱۲ و ۱۳ است. در نتیجه طول ارتفاع وارد بر وتر برابر است با $\frac{5\times12}{13}=\frac{60}{13}$.

۸۳ **۲** در یک مثلث قائم‌الزاویه، بزرگ‌ترین ضلع همان وتر مثلث است؛ پس در این مثلث قائم‌الزاویه طول وتر $a+4$ و اضلاع قائمه a و $a+2$ می‌باشند، بنابراین طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$(a+4)^2=(a+2)^2+a^2 \Rightarrow a^2+8a+16=(a^2+4a+4)+a^2$$

$$\Rightarrow a^2-4a-12=0 \Rightarrow (a+2)(a-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 & \text{غ‌ق‌ق} \\ a=6 \end{cases}$$

در نتیجه این مثلث به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ بوده و مساحت آن برابر است با:

$$S=\frac{1}{2}\times8\times6=24$$

۸۴ **۲** سن آیدین را x فرض می‌کنیم. داریم:

$x+51=(x-5)^2 \Rightarrow x^2-10x+25=x+51 \Rightarrow x^2-11x-26=0 \Rightarrow (x+2)(x-13)=0 \Rightarrow x=-2$ یا $x=13$

بنابراین آیدین در حال حاضر ۱۳ سال دارد. اگر y سال دیگر سن آیدین مجذور سن ۷ سال قبلش باشد، داریم:

$$(13-7)^2=13+y \Rightarrow 36=13+y \Rightarrow y=23$$

۸۵ | ۴

$$\begin{cases} 12 \xrightarrow{\text{واحد اضافه شود.} a} 12+a \\ 18 \xrightarrow{\text{واحد اضافه شود.} a} 18+a \end{cases} \Rightarrow (12+a)(18+a) = 12\times 18 + 2a^2 \Rightarrow 216 + 30a + a^2 = 216 + 2a^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 30a = 0 \Rightarrow a(a-30) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 & \text{غقق} \\ a = 30 \end{cases}$$

حال حاصل عبارت $\sqrt{a^2+6a+9}$ را به ازای $a = 30$ می‌یابیم:

$$\sqrt{a^2+6a+9} = \sqrt{(a+3)^2} = |a+3| = |30+3| = 33$$

۸۶ | ۴ **روش اول:**

$$(x-1)(x-3)+2+k^2 = 0 \Rightarrow x^2-4x+3+2+k^2 = 0 \Rightarrow x^2-4x+4+k^2+1 = 0 \Rightarrow (x-2)^2+k^2+1 = 0$$

مجموع دو عدد نامنفی $(x-2)^2$ و k^2 و یک عدد مثبت (۱)، همواره مثبت است و هیچ‌گاه صفر نمی‌شود. لذا معادله جواب ندارد.

روش دوم:

$$(x-1)(x-3)+2+k^2 = 0 \Rightarrow x^2-4x+k^2+5 = 0$$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(k^2+5) = -4k^2 - 4 \Rightarrow \Delta < 0$ همواره $\Rightarrow$ این معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

۸۷ | ۱ می‌دانیم اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، آن‌گاه $b^2 = ac \, (*)$. حال به حل معادلهٔ درجه دوم می‌پردازیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6b)^2 - 4(9a)(c) = 36b^2 - 36ac \Rightarrow \Delta = 36(b^2 - ac) \overset{(*)}{=\!=} 36(b^2 - b^2) = 0$$

پس این معادلهٔ درجه دوم، دارای ریشهٔ مضاعف است.

۸۸ | ۱ می‌دانیم معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c = 0$، دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است هرگاه $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. پس:

$$2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \Delta = a^2 - 4\times 2\times\left(a - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \Delta = a^2 - 8a + 12$$

با توجه به این‌که معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد، بنابراین باید $\Delta > 0$ شود. داریم:

$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 8a + 12 > 0 \Rightarrow (a-2)(a-6) > 0 \Rightarrow a > 6$ یا $a < 2$

۸۹ | ۱ باید دلتای معادله کم‌تر از صفر باشد. داریم:

$$(m+1)^2 - 4\times 2\times\left(\frac{m}{2}+2\right) < 0 \Rightarrow m^2+2m+1-4m-16 < 0 \Rightarrow m^2-2m-15 < 0$$

$$\Rightarrow (m+3)(m-5) < 0 \Rightarrow -3 < m < 5$$

۹۰ | ۱

$$\begin{cases} y = (2x+1)(x+8) = 2x^2+17x+8 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow 2x^2+17x+8 = mx \Rightarrow 2x^2+(17-m)x+8 = 0$$

باید دلتای معادلهٔ $2x^2+(17-m)x+8 = 0$ را کم‌تر از صفر قرار دهیم. داریم:

$$(17-m)^2 - 4\times 2\times 8 < 0 \Rightarrow 289 - 34m + m^2 - 64 < 0 \Rightarrow m^2 - 34m + 225 < 0 \Rightarrow (m-9)(m-25) < 0 \Rightarrow 9 < m < 25$$

۹۱ | ۳ معادلهٔ حاصل از تقاطع ضابطه‌های خط و منحنی باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد. داریم:

$$(m+3)x^2 + mx = 2x - 4 \Rightarrow (m+3)x^2 + (m-2)x + 4 = 0 \xrightarrow[\Delta=0]{\text{شرط ریشهٔ مضاعف}} (m-2)^2 - 4(m+3)(4) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 16m - 48 = 0 \Rightarrow m^2 - 20m - 44 = 0 \xrightarrow[\text{ریشه‌ها را حدس می‌زنیم.}]{\text{به کمک گزینه‌ها}} (m-22)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 22 \\ \text{یا} \\ m = -2 \end{cases}$$

۹۲ | ۲ باید معادلهٔ تلاقی f و g یعنی $f(x) = g(x)$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2+1 = ax^2+4x \Rightarrow (a-1)x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 16 + 4(a-1) = 0 \Rightarrow a = -3$$

۹۳ | ۲ باید معادلهٔ تلاقی خط $y = -3x+2$ با منحنی $y = \frac{x^2+a}{x-2}$ دارای ریشه مضاعف باشد:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+a}{x-2} \\ y = -3x+2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2+a}{x-2} = -3x+2 \Rightarrow x^2+a = (x-2)(-3x+2) \Rightarrow x^2+a = -3x^2+2x+6x-4$$

$$\Rightarrow x^2+a = -3x^2+8x-4 \Rightarrow 4x^2 - 8x + 4 + a = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(4)(4+a) = 0$$

$$\Rightarrow 64 - 16(4+a) = 0 \Rightarrow 64 - 64 + a = 0 \Rightarrow a = 0$$

۹۴ **۳** منحنی $y=(x-1)(x^2-ax+a)$ محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. به دلیل وجود عبارت $(x-1)$ منحنی داده شده محور xها را در نقطهٔ $x=1$ قطع می‌کند.

اگر بخواهیم منحنی در هیچ نقطهٔ دیگری محور xها را قطع نکند، باید معادلهٔ $x^2-ax+a=0$ فاقد ریشه باشد یا تنها یک ریشهٔ مضاعف در $x=1$ داشته باشد. بنابراین داریم:

$$x^2-ax+a=0 \xRightarrow{\Delta<0} a^2-4a<0 \Rightarrow a(a-4)<0 \Rightarrow 0<a<4$$

$$x^2-ax+a=0 \xRightarrow{\Delta=0} a^2-4a=0 \Rightarrow a=0 \text{ یا } a=4$$

در حالت $a=0$ معادلهٔ منحنی به $y=(x-1)x^2$ و در حالت $a=4$ معادلهٔ منحنی به $y=(x-1)(x-2)^2$ تبدیل می‌شود که در هیچ کدام از دو حالت $x=1$ ریشهٔ مضاعف نیست، لذا منحنی $y=(x-1)(x^2-ax+a)$ تنها در صورتی محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند که $0<a<4$ باشد.

۹۵ **۴** **روش اول:** می‌دانیم معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ با شرط $\Delta=0$ دارای یک ریشهٔ مضاعف یا یک ریشهٔ تکراری است. در این حالت $x=-\frac{b}{2a}$، تنها ریشه خواهد بود. حال با توجه به این‌که $x=2$ تنها ریشه است، لذا داریم:

$$2=-\frac{-2(a+b)}{2\times 3} \Rightarrow a+b=6$$

روش دوم: با توجه به این‌که $x=2$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $3x^2-2(a+b)x+3(a-b)=0$ است، لذا داریم:

$$k(x-2)^2 \equiv 3x^2-2(a+b)x+3(a-b) \Rightarrow kx^2-4kx+4k=3x^2-2(a+b)x+3(a-b) \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow k=3 \Rightarrow 3x^2-12x+12 \equiv 3x^2-2(a+b)x+3(a-b) \Rightarrow \begin{cases} 2(a+b)=12 \\ 3(a-b)=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ a-b=4 \end{cases}$$

۹۶ **۴** معادلهٔ $x^2-4x+k=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است، لذا باید Δ یا Δ' آن عددی مثبت باشد. داریم:

$$\Delta'=\left(\frac{4}{2}\right)^2-1\times k>0 \Rightarrow k<4 \quad (*)$$

از طرف دیگر می‌دانیم حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$، در صورت وجود برابر است با $\frac{c}{a}$.

$$x^2-4x+k=0 \Rightarrow x'x''=k \xRightarrow{(*)} x'x''<4$$

۹۷ **۳** x_1 و x_2 جواب‌های معادلهٔ $x^2+3x-1=0$ هستند. لذا داریم:

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=-\frac{1}{1} \text{ و } x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{1}$$

و حاصل $x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3$، همان $(x_1+x_2)^3$ است، لذا داریم:

$$x_1+x_2=-3 \Rightarrow (x_1+x_2)^3=(-3)^3=-27$$

۹۸ **۳** با توجه به این‌که $\frac{c}{a}=\frac{1}{1}=1$ است، لذا ریشهٔ دیگر باید به گونه‌ای باشد که اگر در $x_1=\sqrt{5}-2$ ضرب شود، حاصل برابر ۱ شود. یعنی ریشهٔ دیگر، معکوس $\sqrt{5}-2$ است:

$$x_2=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2$$

۹۹ **۲** مجموع دو ریشهٔ معادلهٔ $4x^2+kx-21=0$ برابر -2 است، پس داریم $-\frac{k}{4}=-2 \Rightarrow k=8$.

بنابراین معادله به صورت $4x^2+8x-21=0$ است. اکنون ریشه‌های این معادله را به‌دست می‌آوریم:

$$4x^2+8x-21=0 \Rightarrow (2x-3)(2x+7)=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \text{ یا } x=-\frac{7}{2} \Rightarrow$$ $x=\frac{3}{2}$ ریشهٔ بزرگ‌تر است.

۱۰۰ **۴**

> **یادآوری:** اگر m واسطهٔ حسابی دو عدد q و p باشد، در این صورت $m=\frac{p+q}{2}$ است.

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{8} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{1}{4} \quad (*)$$

$$(m^2-4)x^2-3x+m=0 \Rightarrow x_1+x_2=\frac{3}{m^2-4} \xRightarrow{(*)} \frac{1}{4}=\frac{3}{m^2-4} \Rightarrow m^2-4=12 \Rightarrow m^2=16 \Rightarrow m_1=4 \text{ یا } m_2=-4$$

به ازای $m=4$، دلتای معادله عددی منفی می‌شود، لذا قابل قبول نیست. بنابراین $m=-4$ پاسخ صحیح است.

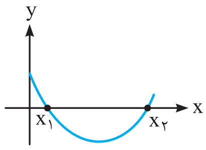
۱۰۱ **۲**

> **یادآوری:** اگر p، q و r جملات متوالی دنبالهٔ حسابی باشند، آن‌گاه $2q=p+r$.

$$x^2-mx+2=0 \Rightarrow x_1+x_2=m \quad , \quad x_1x_2=2 \quad (*)$$

$$2(x_1+x_2)=x_1x_2+4 \xRightarrow{(*)} 2m=2+4 \Rightarrow m=3$$

۱۰۲ **۲** مطابق شکل، اگر شناگر در نقطه به طول x_1 وارد آب شود و در نقطه به طول x_2 از آب خارج شود، (x_2-x_1) متر جلوتر از آب خارج می‌شود. داریم:



$$x_2-x_1=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{(-10)^2-4\times 1\times 8}}{1}=\sqrt{68}$$

۱۰۳ **۲** در معادلهٔ $2x^2-x+k=0$، اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله باشند، داریم $x_1+x_2=\frac{1}{2}$. از طرف دیگر بین ریشه‌ها رابطهٔ $x_1+2x_2=3$ برقرار است. داریم:

$$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{1}{2}\\ x_1+2x_2=3\end{cases}\Rightarrow x_2=\frac{5}{2}\ ,\ x_1=-2\Rightarrow x_1x_2=-5\quad (*)$$

با توجه به این‌که معادله به صورت $2x^2-x+k=0$ است، لذا $x_1x_2=\frac{k}{2}$ و در نتیجه داریم:

$$x_1x_2=\frac{k}{2}\xrightarrow{(*)}\frac{k}{2}=-5\Rightarrow k=-10$$

۱۰۴ **۳**

$$\begin{cases}\text{طبق فرض}: x_1=2x_2\\ 2x^2+ax+9=0\Rightarrow x_1x_2=\frac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow 2x_2x_2=\frac{9}{2}\Rightarrow x_2^2=\frac{9}{4}\Rightarrow x_2=\pm\frac{3}{2}$$

با توجه به این‌که $x_1=2x_2$ است، لذا $x_1=\pm 3$ است. مجموع دو ریشهٔ مثبت در این حالت برابر است با:

$$x_2=\frac{3}{2}\ ,\ x_1=3\Rightarrow x_1+x_2=4.5$$

۱۰۵ **۴** **روش اول:** اگر x_2 را ریشهٔ بزرگ‌تر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases}x_2-x_1=2\\ x_2+x_1=\frac{15}{3}=5\end{cases}\Rightarrow x_1=\frac{3}{2}\ ,\ x_2=\frac{7}{2}\Rightarrow x_1x_2=\frac{21}{4}\quad (*)$$

$$3x^2-15x+m=0\Rightarrow x_1x_2=\frac{m}{3}\xrightarrow{(*)}\frac{m}{3}=\frac{21}{4}\Rightarrow m=\frac{63}{4}$$

روش دوم:

$$\begin{cases}S=-\frac{b}{a}=5\\ P=\frac{c}{a}=\frac{m}{3}\end{cases}$$

$$|x_2-x_1|=\sqrt{S^2-4P}\Rightarrow 2=\sqrt{25-\frac{4m}{3}}\xrightarrow{\text{توان ۲}}4=25-\frac{4m}{3}\Rightarrow\frac{4m}{3}=21\Rightarrow m=\frac{63}{4}$$

۱۰۶ **۲** اگر x_2 از سه برابر x_1، ۳ واحد بیشتر باشد، یعنی $x_2=3x_1+3$. از طرف دیگر از معادلهٔ $3x^2-17x+m=0$، داریم $x_1+x_2=\frac{17}{3}$. پس:

$$\begin{cases}x_2=3x_1+3\\ x_1+x_2=\frac{17}{3}\end{cases}\Rightarrow x_1=\frac{2}{3}\ ,\ x_2=5\Rightarrow x_1x_2=\frac{10}{3}\quad (*)$$

$$3x^2-17x+m=0\Rightarrow x_1x_2=\frac{m}{3}\xrightarrow{(*)}\frac{m}{3}=\frac{10}{3}\Rightarrow m=10$$

۱۰۷ **۲** با فرض این‌که x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، رابطهٔ $x'=\frac{x''}{2}+5$ بین آن‌ها برقرار است. پس:

$$x^2-8x+m=0\Rightarrow\begin{cases}S=x'+x''=8\Rightarrow\frac{3x''}{2}+5=8\Rightarrow\frac{3x''}{2}=3\Rightarrow x''=2\\ P=x'.x''=m\end{cases}$$

$$S=x'+x''=8\xrightarrow{x''=2}x'=6\Rightarrow P=6\times 2=m\Rightarrow m=12$$

۱۰۸ **۳** اگر x_1 و x_2 دو ریشهٔ معادله باشند، $x_1^2=x_2$ است. از طرف دیگر با توجه به $x^2-6x+5+m=0$، داریم $x_1+x_2=6$. پس:

$$\begin{cases}x_1+x_2=6\\ x_1^2=x_2\end{cases}\Rightarrow x_1^2+x_1-6=0\Rightarrow(x_1+3)(x_1-2)=0\Rightarrow x_1=-3\ \text{یا}\ x_1=2$$

$$\begin{cases}x_1=-3\Rightarrow x_2=9\\ x_1=2\Rightarrow x_2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1x_2=-27\\ x_1x_2=8\end{cases}\xrightarrow{x_1x_2=5+m}\begin{cases}5+m=-27\Rightarrow m=-32\\ 5+m=8\Rightarrow m=3\end{cases}$$

بنابراین به ازای هر دو مقدار $m=-32$ و $m=3$، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2-6x+5+m=0$ مجذور دیگری است. فقط $m=-32$ در گزینه‌ها دیده می‌شود.

۱۰۹ **۴** فرض می‌کنیم x_1 و x_2 دو ریشهٔ معادله باشند به گونه‌ای که $x_2=2x_1$. داریم:

$$x_1+x_2=\frac{3}{m+1}\xrightarrow{x_2=2x_1}3x_1=\frac{3}{m+1}\Rightarrow x_1=\frac{1}{m+1}\ ,\ x_2=\frac{2}{m+1}\quad(*)$$

$$x_1.x_2=\frac{m}{m+1}\xrightarrow{(*)}\frac{1}{m+1}\times\frac{2}{m+1}=\frac{m}{m+1}\xrightarrow{m\neq -1}\frac{2}{m+1}=m\Rightarrow m^2+m-2=0\Rightarrow m=1 \text{ یا } m=-2$$

۱۱۰ **۴** **روش اول:** اگر جواب کوچک‌تر x_1 باشد، جواب بزرگ‌تر $x_2=x_1+2$ است.

$$\begin{cases}x_1+x_2=8\\x_2=x_1+2\end{cases}\Rightarrow x_1=3\ ,\ x_2=5\Rightarrow x_1x_2=15\quad(*)$$

با توجه به این‌که در معادلهٔ $x^2-8x+2k-1=0$، حاصل‌ضرب جواب‌ها $2k-1$ است، داریم:

$$x_1x_2=2k-1\xrightarrow{(*)}15=2k-1\Rightarrow k=8$$

روش دوم: می‌دانیم تفاضل دو جواب معادلهٔ درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ از رابطهٔ $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ به‌دست می‌آید. با توجه به این‌که جواب‌ها، دو عدد فرد متوالی هستند، پس $|x_2-x_1|=2$ است. لذا داریم:

$$x^2-8x+2k-1=0\Rightarrow\frac{\sqrt{(-8)^2-4\times1\times(2k-1)}}{1}=2\Rightarrow 64-4(2k-1)=4\Rightarrow k=8$$

۱۱۱ **۴** با توجه به این‌که مجموع دو ریشه عددی مثبت است، لذا $-\frac{2}{a}$ عددی مثبت است، در نتیجه a عددی منفی است. با توجه به این‌که a و c دو ریشه هستند، بنابراین برای حاصل ضرب و مجموع ریشه‌ها داریم:

$$a\times c=\frac{c}{a}\Rightarrow a^2c=c\underset{(\text{چرا؟})}{\xrightarrow{c\neq0}}a^2=1\Rightarrow a=-1 \text{ یا } a=+1$$

حال با توجه به این‌که a باید عددی منفی باشد، $a=-1$ است. بنابراین برای c داریم:

$$a+c=-\frac{2}{a}\Rightarrow -1+c=-\frac{2}{-1}\Rightarrow c=3$$

۱۱۲ **۴**

> **نکته:** معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی است، اگر و تنها اگر $\frac{c}{a}>0$، $-\frac{b}{a}<0$ و $\Delta>0$ باشد.

بررسی گزینه‌ها:

۱) $a=1$ و $b=k$ است، پس $-\frac{b}{a}$ هم منفی می‌تواند باشد و هم مثبت، لذا غیرقابل قبول است.

۲) $a=1$ و $c=-k-2$ است، پس $\frac{c}{a}$ هم منفی می‌تواند باشد و هم مثبت، لذا غیرقابل قبول است.

۳) $a=1$ و $b=-(k^2+1)$ است، پس $-\frac{b}{a}$ همواره مثبت است، در صورتی که باید همواره منفی باشد، لذا غیرقابل قبول است.

۴) $a=1$، $b=k^2+3$ و $c=k^2+2$ است. $\frac{c}{a}$ همواره مثبت و $-\frac{b}{a}$ همواره منفی است. با توجه به این‌که $\Delta=k^4+2k^2+1=(k^2+1)^2$ نیز همواره مثبت است، پس این معادله به ازای جمیع مقادیر k، دو ریشهٔ حقیقی منفی دارد. (چون $a+c=b$ است، پس این دو ریشه، -1 و $-k^2-2$ هستند.) لذا این گزینه درست است.

۱۱۳ **۳** باید معادلهٔ $2x^2-4x+m-3=0$ دو جواب مثبت داشته باشد. می‌دانیم معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای دو جواب مثبت است، هرگاه اولاً $\Delta>0$ (یا $\Delta'>0$)، ثانیاً $-\frac{b}{a}>0$ و ثالثاً $\frac{c}{a}>0$ باشد. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\quad \Delta'>0\Rightarrow(-2)^2-2\times(m-3)>0\Rightarrow 4-2m+6>0\Rightarrow m<5\\(2)\quad -\frac{b}{a}>0\Rightarrow-(-\frac{4}{2})>0\Rightarrow \text{همواره برقرار است.}\\(3)\quad \frac{c}{a}>0\Rightarrow\frac{m-3}{2}>0\Rightarrow m>3\end{array}\right\}\Rightarrow 3<m<5$$

۱۱۴ **۱**

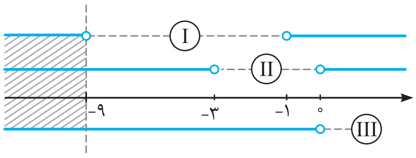
> **یادآوری:** تابع $y=ax^2+bx+c$ در صورتی محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند که ۳ شرط زیر برقرار باشد:
>
> ۱) $\Delta>0$ ۲) $x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0$ ۳) $x_1.x_2=\frac{c}{a}>0$

با توجه به یادآوری فوق، برای تابع $y=ax^2+(a+3)x-1$ که محور x ها را در ۲ نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند، داریم:

$$(1)\quad\Delta=(a+3)^2-4(a)(-1)=a^2+10a+9>0\Rightarrow(a+9)(a+1)>0\Rightarrow(a<-9)\cup(a>-1)\qquad(I)$$

$$(2)\quad\frac{-(a+3)}{a}<0\Rightarrow(a<-3)\cup(a>0)\qquad(II)$$

$$(3)\quad\frac{-1}{a}>0\Rightarrow a<0\qquad(III)$$



جواب آخر: اشتراک جواب‌های (I)، (II) و (III): $a<-۹$

۱۱۵ **۲** می‌دانیم معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است، هرگاه $\frac{c}{a}<۰$ باشد.

$$(m-۱)x^۲+mx+m-۳=۰\Rightarrow\frac{m-۳}{m-۱}<۰\Rightarrow ۱<m<۳$$

تذکر: در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، اگر $\frac{c}{a}<۰$ باشد، معادله حتماً دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد و نیازی به بررسی Δ نیست، زیرا Δ قطعاً مثبت است. (چرا؟)

۱۱۶ **۱** می‌دانیم معادلهٔ $y=ax^۲+bx+c$ با شرط $b=۰$ و $\frac{c}{a}<۰$ دو ریشهٔ قرینهٔ هم دارد. لذا داریم:

$$\begin{cases}m^۲-۱۶=۰\\ \frac{m+۳}{۳}<۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-۴ \ \text{یا}\ m=۴\\ m<-۳\end{cases}\Rightarrow m=-۴$$

۱۱۷ **۲** می‌دانیم معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ با شرط $c=a$ و $\Delta>۰$ دارای دو ریشهٔ معکوس هم است. لذا داریم:

$$m^۲-۶=m\Rightarrow m^۲-m-۶=۰\Rightarrow(m+۲)(m-۳)=۰\Rightarrow m=-۲\ \text{یا}\ m=۳$$

به ازای $m=۳$، دلتای معادله عددی منفی است، لذا قابل قبول نیست. اما به ازای $m=-۲$، دلتای معادله عددی مثبت است، بنابراین $m=-۲$ قابل قبول است.

تذکر: در حالتی که $c=a$ می‌باشد، $\left|\frac{b}{a}\right|>۲$ شرط لازم و کافی برای $\Delta>۰$ است. بنابراین:

$$\left|\frac{۵}{m}\right|>۲\Rightarrow|m|<\frac{۵}{۲}\Rightarrow m=۳\ \text{غیرقابل قبول است.}$$

۱۱۸ **۲** **روش اول:** معادله دارای دو ریشه حقیقی است، بنابراین:

$$mx^۲+۳x+m^۲-۲=۰\xrightarrow{\Delta>۰}۹-۴m(m^۲-۲)>۰\quad(*)$$

به علاوه در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، مجموع ریشه‌ها برابر با $\frac{-b}{a}$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر با $\frac{c}{a}$ است. پس داریم:

$$mx^۲+۳x+m^۲-۲=۰\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}: P=\frac{m^۲-۲}{m}$$

چون ریشه‌های معادله معکوس یک‌دیگرند، بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها برابر با ۱ است و داریم:

$$P=۱\Rightarrow\frac{m^۲-۲}{m}=۱\Rightarrow m^۲-m-۲=۰\Rightarrow(m+۱)(m-۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ m=۲\end{cases}$$

حال هر یک از مقادیر به‌دست آمده را در رابطهٔ $(*)$ قرار می‌دهیم، داریم:

$$\begin{cases}m=-۱\xrightarrow{(*)}۹-۴(-۱)(۱-۲)>۰\Rightarrow ۵>۰\Rightarrow \text{قابل قبول}\\ m=۲\xrightarrow{(*)}۹-۴\times۲(۴-۲)>۰\Rightarrow -۷<۰\Rightarrow \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

بنابراین فقط به ازای $m=-۱$ دلتای معادله مثبت و معادله دارای دو ریشه است.

روش دوم: در معادلهٔ $mx^۲+۳x+m^۲-۲=۰$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر با $P=\frac{c}{a}=\frac{m^۲-۲}{m}$ و مجموع آن‌ها برابر با $S=\frac{-b}{a}=\frac{-۳}{m}$ می‌باشد. چون ریشه‌های معادله معکوس یک‌دیگر می‌باشند، اولاً قدرمطلق مجموع ریشه‌ها بزرگ‌تر از ۲ می‌باشد:

$$|S|=\left|x+\frac{۱}{x}\right|\geq۲\Rightarrow\left|\frac{-۳}{m}\right|\geq۲\Rightarrow|m|\leq\frac{۳}{۲}$$

ثانیاً حاصل‌ضرب ریشه‌ها برابر با ۱ می‌باشد:

$$P=۱\Rightarrow\frac{m^۲-۲}{m}=۱\Rightarrow m^۲-m-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ m=۲\xrightarrow{|m|\leq\frac{۳}{۲}}\text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

۱۱۹ **۲** با توجه به این‌که معادله دارای دو جواب مختلف‌العلامه است، لذا باید $\frac{c}{a}<۰$ باشد. از طرف دیگر جواب منفی از لحاظ قدرمطلق از جواب مثبت بزرگ‌تر است، پس مجموع دو ریشه عددی منفی است، یعنی $-\frac{b}{a}<۰$ است. بنابراین باید $\frac{c}{a}<۰$ و $\frac{b}{a}>۰$ باشد، که تنها معادلهٔ گزینهٔ (۲) دارای این شرایط است.

۱۲۰ ۳

$$x^2-mx+1-m=0 \Rightarrow S=m\ ,\ P=1-m \quad (*)$$

$$x_1^2+x_2^2=1 \Rightarrow S^2-2P=1 \overset{(*)}{\Longrightarrow} m^2-2(1-m)=1 \Rightarrow m^2+2m-3=0 \Rightarrow (m-1)(m+3)=0 \Rightarrow m=1 \text{ یا } m=-3$$

به ازای $m=-3$، دلتا منفی می‌شود و لذا غیرقابل قبول است، پس $m=1$.

۱۲۱ ۱ اگر ریشه‌های معادله را α و β بنامیم، داریم:

$$\alpha^2+\beta^2=S^2-2P=6 \xrightarrow[P=\frac{5}{m}]{S=\frac{m+3}{m}} \left(\frac{m+3}{m}\right)^2-\frac{10}{m}=6 \Rightarrow \frac{m^2+6m+9}{m^2}-\frac{10}{m}=6$$

$$\xrightarrow{\times m^2} 5m^2+4m-9=0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} m=1 \\ m=-\frac{9}{5} \end{cases}$$

از مقادیر به‌دست آمده برای m باید ببینیم کدام‌یک دلتای معادلهٔ اصلی را نامنفی می‌کنند:

$$\begin{cases} m=1 \Rightarrow x^2-4x+5=0 \Rightarrow \Delta=16-20<0 & \text{غ‌ق‌ق} \\ m=-\frac{9}{5} \Rightarrow \Delta>0 & \text{ق‌ق} \end{cases}$$

۱۲۲ ۴ با توجه به معادلهٔ $x^2+px+q=0$، داریم $x_1x_2=q$. همچنین طبق صورت مسأله می‌دانیم $x_1=\sin\alpha$ و $x_2=\cos\alpha$.

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{(x_1)^2+(x_2)^2}{x_1x_2}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{q}=\frac{1}{q}$$

تذکر: اگر $(x_1)^2+(x_2)^2$ را از S^2-2P به‌دست می‌آوردیم، باز هم به $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cos\alpha$ یعنی عدد ۱ می‌رسیدیم.

۱۲۳ ۴ **روش اول:**

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{S^2-2P}{P}=\frac{S^2}{P}-2=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2}{\frac{c}{a}}-2=\frac{b^2}{ac}-2 \quad (*)$$

$$x^2-\left(\frac{1}{a^4}+a^2\right)x+\frac{1}{a^2}=0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{\left(-\left(\frac{1}{a^4}+a^2\right)\right)^2}{1\times\frac{1}{a^2}}-2=a^2\left(\frac{1}{a^8}+\frac{2}{a^2}+a^4\right)-2=a^6+\frac{1}{a^6}$$

روش دوم: با دقت کردن در معادلهٔ $x^2-\left(\frac{1}{a^4}+a^2\right)x+\frac{1}{a^2}=0$، می‌توان گفت که $x_1=\frac{1}{a^4}$ و $x_2=a^2$ دو ریشهٔ معادله‌اند. لذا:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{\frac{1}{a^4}}{a^2}+\frac{a^2}{\frac{1}{a^4}}=\frac{1}{a^6}+a^6$$

۱۲۴ ۴ **روش اول:**

$$\left.\begin{array}{l} x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=(S^2-2P)^2-2P^2 \quad (*) \\ x^2-4x+3=0 \Rightarrow S=4\ ,\ P=3 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^4+x_2^4=(16-6)^2-2\times3^2=82$$

روش دوم:

$$x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow x_1=3\ ,\ x_2=1 \Rightarrow x_1^4+x_2^4=81+1=82$$

۱۲۵ ۴

$$\left.\begin{array}{l} x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3SP \\ x^2-4x+1=0 \Rightarrow S=4\ ,\ P=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^3+x_2^3=4^3-3\times4\times1=52$$

۱۲۶ ۴ در معادلهٔ $x^2-2x+\frac{3}{4}=0$، مجموع ریشه‌ها برابر با $S=\frac{-b}{a}=2$ و حاصل‌ضرب آن‌ها برابر با $P=\frac{c}{a}=\frac{3}{4}$ است، پس داریم:

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=\left((x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right)^2-2P^2=(S^2-2P)^2-2P^2$$

$$=\left(4-2\left(\frac{3}{4}\right)\right)^2-2\left(\frac{9}{16}\right)=\left(4-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{8}=\frac{25}{4}-\frac{9}{8}=\frac{50-9}{8}=\frac{41}{8}$$

۱۲۷ ۴

$$x^۲-۴x+۱=۰ \Rightarrow S=۴\,,\,P=۱ \quad (*)$$

$$\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}=\sqrt{S+۲\sqrt{P}} \overset{(*)}{=} \sqrt{۴+۲\sqrt{۱}}=\sqrt{۶}$$

۱۲۸ ۳

$$۴x^۲-۱۲x+۱=۰ \Rightarrow S=۳\,,\,P=\frac{۱}{۴} \quad (*)$$

$$A=\frac{۱}{\sqrt{\alpha}}+\frac{۱}{\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{\sqrt{S+۲\sqrt{P}}}{\sqrt{P}} \overset{(*)}{=} \frac{\sqrt{۳+۲\times\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}=۴$$

۱۲۹ ۱

$$\left.\begin{array}{l} x_۱\sqrt{x_۲}+x_۲\sqrt{x_۱}=\sqrt{x_۱x_۲}(\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲})=\sqrt{P}\times\sqrt{S+۲\sqrt{P}} \\ x^۲-۳x+۱=۰ \Rightarrow S=۳\,,\,P=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow x_۱\sqrt{x_۲}+x_۲\sqrt{x_۱}=\sqrt{۱}\times\sqrt{۳+۲\sqrt{۱}}=\sqrt{۵}$$

۱۳۰ ۴ در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $a+c=b$ باشد، یکی از ریشه‌ها $x=-۱$ و دیگری $x=-\frac{c}{a}$ است. داریم:

$$x^۲-۷x-۸=۰ \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_۱=-۱ \\ x_۲=۸ \end{cases} \Rightarrow \sqrt[۳]{x_۱}+\sqrt[۳]{x_۲}=\sqrt[۳]{-۱}+\sqrt[۳]{۸}=-۱+۲=۱$$

۱۳۱ ۱ **روش اول:**

$$x^۲-(۱+\sqrt{۳})x+\sqrt{۳}=۰ \Rightarrow S=۱+\sqrt{۳}\,,\,P=\sqrt{۳}$$

$$|\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲}|+\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}=\sqrt{S-۲\sqrt{P}}+\sqrt{S+۲\sqrt{P}}=\sqrt{۱+\sqrt{۳}-۲\sqrt[۴]{۳}}+\sqrt{۱+\sqrt{۳}+۲\sqrt[۴]{۳}}$$

$$=\sqrt{(\sqrt[۴]{۳}-۱)^۲}+\sqrt{(\sqrt[۴]{۳}+۱)^۲}=\sqrt[۴]{۳}-۱+\sqrt[۴]{۳}+۱=۲\sqrt[۴]{۳}$$

روش دوم: با توجه به این‌که مجموع ضرایب برابر صفر است، لذا $x_۱=۱$ و $x_۲=\sqrt{۳}$ است. بنابراین داریم:

$$|\sqrt{x_۱}-\sqrt{x_۲}|+\sqrt{x_۱}+\sqrt{x_۲}=|\sqrt{۱}-\sqrt[۴]{۳}|+\sqrt[۴]{۳}+\sqrt{۱}=\sqrt[۴]{۳}-۱+\sqrt[۴]{۳}+۱=۲\sqrt[۴]{۳}$$

۱۳۲ ۳ **روش اول:**

$$x^۲+۳x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{-۳\pm\sqrt{۹+۴}}{۲}=\frac{-۳\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow|\alpha|+|\beta|=\left|\frac{-۳-\sqrt{۱۳}}{۲}\right|+\left|\frac{-۳+\sqrt{۱۳}}{۲}\right|=\frac{\sqrt{۱۳}+۳}{۲}+\frac{\sqrt{۱۳}-۳}{۲}=\sqrt{۱۳}$$

روش دوم: در معادلهٔ $x^۲+۳x-۱=۰$، $\frac{c}{a}=-۱<۰$ است یعنی معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی مختلف‌العلامه می‌باشد. بنابراین داریم:

$$|\alpha|+|\beta|=\big||\alpha|+|\beta|\big|=|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{۳^۲-۴\times۱\times(-۱)}=\sqrt{۱۳}$$

۱۳۳ ۱ اگر a و b ریشه‌های معادله $x^۲+۵x-۲=۰$ باشند، حاصل‌ضرب و مجموع ریشه‌ها به صورت $a+b=-۵$ و $ab=-۲$ ظاهر می‌شوند. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=-۵ \\ ab=-۲ \xRightarrow{a>۰} b<۰ \end{array}\right\} \Rightarrow |\overbrace{a+۲b}^{\text{منفی}}|=-a-۲b$$

در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|a+۲b|+|\overset{-}{b}|-|\overset{+}{a}|=-a-۲b-b-a=-۲a-۳b$$

۱۳۴ ۱ در معادلهٔ $x^۲+bx+c=۰$، با توجه به این‌که $۱+c=b$ است، لذا $x_۱=-۱$ یک ریشه و $x_۲=-\frac{c}{a}=-c$ ریشهٔ دیگر است. بنابراین $x=-c$ ریشهٔ آن است.

۱۳۵ ۲ با توجه به این‌که $۹a+c=۳b$، بنابراین $۹a-۳b+c=۰$ است. با جایگذاری $x=-۳$ در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ به تساوی $۹a-۳b+c=۰$ می‌رسیم و لذا $x_۱=-۳$ یک ریشهٔ معادله است. پس اگر $x_۲$ ریشهٔ دیگر معادله باشد، داریم:

$$x_۱x_۲=-۳x_۲=\frac{c}{a} \Rightarrow x_۲=-\frac{c}{۳a}$$

۱۳۶ ۲

> **نکته:** اگر $x=x_۰$ ریشهٔ مشترک دو معادله مانند $P(x)=۰$ و $Q(x)=۰$ باشد، در این صورت ریشهٔ مشترک تفاضل و مجموع و به‌طور کلی ریشهٔ مشترک هر ترکیب خطی آن‌ها مانند $nP(x)+mQ(x)=۰$ نیز است.

$$(x^۲-x-۲a)-(x^۲+۲x+a)=۰ \Rightarrow -۳x-۳a=۰ \Rightarrow x=-a$$

$x=-a$ ریشهٔ مشترک دو معادله است، بنابراین در هر دو معادله صدق می‌کند. داریم:

$$x^2-x-2a=0 \xRightarrow{\text{ریشهٔ معادله است. } x=-a} (-a)^2-(-a)-2a=0 \Rightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=0$$

$$x^2+2x+a=0 \xRightarrow{\text{ریشهٔ معادله است. } x=-a} (-a)^2+2(-a)+a=0 \Rightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=0$$

با توجه به این‌که $a>0$ فرض شده است، بنابراین $a=1$ قابل قبول می‌باشد. در نتیجه ریشهٔ مشترک دو معادله $x=-a=-1$ است.

۱۳۷ **۱** اگر ریشهٔ مشترک را α و ریشه‌های غیرمشترک را β و β' درنظر بگیریم، داریم:

$$nx^2-7x+3=0 \Rightarrow \text{ریشه‌ها}: \alpha,\beta \Rightarrow P=\alpha.\beta$$

$$2x^2-6x-m=0 \Rightarrow \text{ریشه‌ها}: \alpha,\beta' \Rightarrow P'=\alpha.\beta'$$

بنابراین:

$$\frac{P}{P'}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta'} \Rightarrow \frac{\beta}{\beta'}=\frac{P}{P'} \Rightarrow \frac{\beta}{\beta'}=\frac{\frac{3}{n}}{-\frac{m}{2}}=\frac{-6}{mn}$$

۱۳۸ **۲** $x=2$ ریشهٔ معادلهٔ $x(ax^2-x-5)=2$ است. لذا در این معادله صدق می‌کند و داریم:

$$x(ax^2-x-5)=2 \xRightarrow{\text{در معادله صدق می‌کند. } x=2} 2(4a-2-5)=2 \Rightarrow a=2$$

بنابراین معادله را می‌توان به صورت $x(2x^2-x-5)=2$ بازنویسی کرد. داریم:

$$2x^3-x^2-5x-2=0$$

به معادلهٔ درجه سومی رسیدیم که می‌دانیم $x=2$ یک ریشهٔ آن است، بنابراین می‌توان عبارت را بر $(x-2)$ تقسیم کرد تا به یک معادلهٔ درجه اول و یک معادلهٔ درجه دوم رسید. داریم:

$$2x^3-x^2-5x-2=0 \Rightarrow (x-2)(2x^2+3x+1)=0$$

مجموع دو ریشهٔ دیگر، مجموع ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3x+1=0$ است که $-\frac{3}{2}$ می‌باشد.

۱۳۹ **۳**

$$f(x)=2x^3-5x^2-x+m \xRightarrow{\text{ریشهٔ تابع است. } x=2} f(2)=0 \Rightarrow 16-20-2+m=0 \Rightarrow m=6$$

پس ضابطهٔ تابع به صورت $y=2x^3-5x^2-x+6$ است. معادلهٔ $2x^3-5x^2-x+6=0$ را حل می‌کنیم. چون می‌دانیم $x=2$ یک جواب معادله است، بنابراین عبارت $2x^3-5x^2-x+6$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است. داریم:

$$2x^3-5x^2-x+6=0 \Rightarrow (x-2)(2x^2-x-3)=0 \Rightarrow (x-2)(x+1)(2x-3)=0$$

بنابراین دو ریشهٔ دیگر تابع $x=\frac{3}{2}$ و $x=-1$ است.

۱۴۰ **۱**

نکته: $P(x)$ چندجمله‌ای از درجهٔ n مفروض است. اگر مجموع ضرایب $P(x)$ برابر با صفر باشد، آن‌گاه یک جواب معادلهٔ $P(x)=0$، $x=1$ بوده و این چندجمله‌ای بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است. اگر چندجمله‌ای $P(x)$ فاقد عدد ثابت باشد، آن‌گاه یک جواب معادلهٔ $P(x)=0$ برابر $x=0$ بوده و این چندجمله‌ای بر (x) بخش‌پذیر است. اگر مجموع ضرایب جملات با توان زوج برابر مجموع ضرایب جملات با توان فرد باشد، در این صورت یک جواب معادلهٔ $P(x)=0$، $x=-1$ بوده و این چندجمله‌ای بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است.

$$P(x)=3x^4+2x^3-3x^2-2x=0$$

معادلهٔ فوق فاقد عدد ثابت است، بنابراین $x=0$ یک جواب معادله است و لذا $P(x)$ بر x بخش‌پذیر است.

مجموع ضرایب معادلهٔ فوق صفر است، پس $x=1$ یک جواب معادله است و لذا $P(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است.

مجموع ضرایب با توان زوج $\left(3+(-3)\right)$ برابر مجموع ضرایب با توان فرد $\left(2+(-2)\right)$ است، لذا $P(x)$ بر $x+1$ نیز بخش‌پذیر است.

$$3x^4+2x^3-3x^2-2x=x(3x^3+2x^2-3x-2)=x(x-1)(3x^2+5x+2)=x(x-1)(x+1)(3x+2)$$

بنابراین معادلهٔ $3x^4+2x^3-3x^2-2x=0$ همان معادلهٔ $x(x-1)(x+1)(3x+2)=0$ است. در نتیجه ۴ جواب دارد.

۱۴۱ **۱** مجموع ضرایب معادلهٔ $x^3+4x^2-2x-3=0$ برابر با صفر است، لذا $x=1$ یک جواب این معادله است و داریم:

$$x^3+4x^2-2x-3=0 \Rightarrow (x-1)(x^2+5x+3)=0$$

با فرض $x_3=1$، می‌دانیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+5x+3=0$ هستند و داریم:

$$x^2+5x+3=0 \Rightarrow S=-5\,,\ P=3$$

$$x_1^2+x_2^2=S^2-2P=(-5)^2-2\times 3=19$$

با توجه به این‌که $x_3=1$ فرض شده است، لذا داریم:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1^2+x_2^2)+(x_3)^2=(19)+(1)^2=20$$

۱۴۲ **۲** با توجه به این‌که $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله هستند، لذا $x_۱^۲-۴x_۱+۱=۰$ و $x_۲^۲-۴x_۲+۱=۰$ است. بنابراین داریم:

$$(x_۲^۲-۴x_۲+۴)(x_۱^۲-۴x_۱+۲)=(\underbrace{x_۲^۲-۴x_۲+۱}_{\text{صفر}}+۳)(\underbrace{x_۱^۲-۴x_۱+۱}_{\text{صفر}}+۱)=(۰+۳)(۰+۱)=۳$$

۱۴۳ **۲** با توجه به این‌که $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله هستند، بنابراین در معادله صدق می‌کنند. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_۱^۲-x_۱-۳=۰\Rightarrow x_۱^۲-۳=x_۱ \\ x_۲^۲-x_۲-۳=۰\Rightarrow x_۲^۲-۳=x_۲ \end{array}\right\}\Rightarrow (x_۱^۲-۳)(x_۲^۲-۳)=x_۱x_۲=\frac{c}{a}=\frac{-۳}{۱}=-۳$$

۱۴۴ **۳**

$$x_۲^۲-۳x_۲+۱=۰\Rightarrow x_۲^۲=۳x_۲-۱\Rightarrow \sqrt{x_۱^۲(۳x_۲-۱)}=\sqrt{x_۱^۲x_۲^۲}=|x_۱x_۲|=|P|=\left|\frac{c}{a}\right|=\left|\frac{۱}{۱}\right|=۱$$

۱۴۵ **۳**

$$\left.\begin{array}{l} x_۱^۲-۵x_۱+۱=۰\Rightarrow x_۱^۲+۱=۵x_۱\Rightarrow \dfrac{x_۱}{x_۱^۲+۱}=\dfrac{۱}{۵}\Rightarrow \dfrac{۲x_۱}{x_۱^۲+۱}=\dfrac{۲}{۵} \\ x_۲^۲-۵x_۲+۱=۰\Rightarrow x_۲^۲+۱=۵x_۲\Rightarrow \dfrac{x_۲^۲+۱}{x_۲}=۵\Rightarrow \dfrac{x_۲^۲+۱}{۳x_۲}=\dfrac{۵}{۳} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{۲x_۱}{x_۱^۲+۱}+\frac{x_۲^۲+۱}{۳x_۲}=\frac{۲}{۵}+\frac{۵}{۳}=\frac{۶+۲۵}{۱۵}=\frac{۳۱}{۱۵}$$

۱۴۶ **۱** اگر مجموع دو عدد S و حاصل‌ضربشان P باشد، آن دو عدد جواب‌های معادلهٔ $x^۲-Sx+P=۰$ (در صورت وجود) هستند. بنابراین:

$$S=۴\sqrt{۳}\ ,\ P=-۶\Rightarrow x^۲-۴\sqrt{۳}x-۶=۰\Rightarrow x_۱=\frac{-b'-\sqrt{b'^۲-ac}}{a}=\frac{۲\sqrt{۳}-\sqrt{۱۲-(-۶)}}{۱}=۲\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}$$

۱۴۷ **۳**

$$S=x_۱+x_۲=(\sqrt{۲}-۱)^۳+(\sqrt{۲}+۱)^۳$$

$$\Rightarrow S=(\sqrt{۲})^۳-۳\times(\sqrt{۲})^۲\times۱+۳\times\sqrt{۲}\times(۱)^۲-۱+(\sqrt{۲})^۳+۳\times(\sqrt{۲})^۲\times۱+۳\times\sqrt{۲}\times(۱)^۲+۱=۱۰\sqrt{۲}$$

$$P=x_۱x_۲=(\sqrt{۲}-۱)^۳(\sqrt{۲}+۱)^۳=۱$$

بنابراین معادله به صورت $x^۲-۱۰\sqrt{۲}x+۱=۰$ است.

۱۴۸ **۱** با توجه به این‌که $\sqrt{۳-۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^۲}=\sqrt{۲}-۱$ و $\sqrt{۳+۲\sqrt{۲}}=\sqrt{(\sqrt{۲}+۱)^۲}=\sqrt{۲}+۱$ است، داریم:

$$\begin{cases} x_۱=\sqrt{۲}-۱ \\ x_۲=\sqrt{۲}+۱ \end{cases}\Rightarrow S=x_۱+x_۲=۲\sqrt{۲}\ ,\ P=x_۱x_۲=۱$$

بنابراین معادله به صورت $x^۲-۲\sqrt{۲}x+۱=۰$ است.

۱۴۹ **۲** **روش اول:** اگر معادلهٔ درجه دوم با ضرایب گویا دارای ریشهٔ غیر گویا به صورت $p+\sqrt{q}$ $(p,q\in\mathbb{Q})$ باشد، ریشهٔ دیگر آن به صورت $p-\sqrt{q}$ است. با توجه به این‌که $۵+۲\sqrt{۳}$ یک ریشهٔ معادله است، ریشهٔ دیگر معادله باید به صورت $۵-۲\sqrt{۳}$ باشد تا ضرایب معادله گویا شود. داریم:

$$\begin{cases} x_۱=۵-۲\sqrt{۳} \\ x_۲=۵+۲\sqrt{۳} \end{cases}\Rightarrow S=(۵-۲\sqrt{۳})+(۵+۲\sqrt{۳})=۱۰\ ,\ P=(۵-۲\sqrt{۳})(۵+۲\sqrt{۳})=۱۳$$

بنابراین معادله به صورت $x^۲-۱۰x+۱۳=۰$ است.

روش دوم:

$$x=۵+۲\sqrt{۳}\Rightarrow x-۵=۲\sqrt{۳}\xrightarrow{\text{توان دوم}}(x-۵)^۲=۱۲\Rightarrow x^۲-۱۰x+۱۳=۰$$

۱۵۰ **۳** اگر α طول و β عرض مستطیل باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} \alpha\beta=۱۸ \\ ۲(\alpha+\beta)=۱۷\Rightarrow \alpha+\beta=۸/۵ \end{cases}$$

روش اول: معادله‌ای که از حل آن به α و β می‌رسیم، $x^۲-۸/۵x+۱۸=۰$ است. لذا اختلاف طول و عرض مستطیل برابر است با:

$$|\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{(۸/۵)^۲-۴\times۱\times۱۸}}{۱}=\sqrt{۷۲/۲۵-۷۲}=\sqrt{۰/۲۵}=۰/۵$$

روش دوم:

$$(\alpha-\beta)^۲=(\alpha+\beta)^۲-۴\alpha\beta\Rightarrow(\alpha-\beta)^۲=(۸/۵)^۲-۴\times۱۸=۰/۲۵\Rightarrow|\alpha-\beta|=۰/۵$$

روش سوم:

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{S^۲-۴P}=\sqrt{(۸/۵)^۲-۴\times۱۸}=\sqrt{۰/۲۵}=۰/۵$$

۱۵۱ **۴** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $3x^2-4x-1=0$ باشند، آن‌گاه ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+ax+b=0$ به صورت $X_1=x_1+1$ و $X_2=x_2+1$ هستند. بنابراین $x=X-1$ است و داریم:

$$3x^2-4x-1=0 \Rightarrow 3(X-1)^2-4(X-1)-1=0 \Rightarrow 3X^2-10X+6=0 \Rightarrow a=-10\,,\ b=6$$

۱۵۲ **۲** اگر ریشه‌های معادلهٔ $3x^2+7x+1=0$ را x_1 و x_2 و ریشه‌های معادلهٔ $x^2+ax+b=0$ را X_1 و X_2 فرض کنیم، آن‌گاه $X=x+1$ و لذا $x=X-1$. بنابراین داریم:

$$3x^2+7x+1=0 \Rightarrow 3(X-1)^2+7(X-1)+1=0 \Rightarrow 3(X^2-2X+1)+7X-7+1=0 \Rightarrow 3X^2+X-3=0$$

بنابراین معادلهٔ جدید به صورت $3x^2+x-3=0$ است. با ضرب طرفین معادله در $\frac{1}{3}$ داریم:

$$x^2+\frac{x}{3}-1=0 \Rightarrow b=-1$$

۱۵۳ **۳** ابتدا معادله‌ای را می‌نویسیم که ریشه‌های آن ثلث ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-12x-9q=0$ باشد. داریم:

$$X_{\text{جدید}}=\frac{x_{\text{قدیم}}}{3} \Rightarrow x=3X$$

$$2x^2-12x-9q=0 \Rightarrow 2(3X)^2-12(3X)-9q=0 \Rightarrow 18X^2-36X-9q=0 \xRightarrow{\div 18} X^2-2X-\frac{q}{2}=0$$

بنابراین داریم:

$$x^2-2x-\frac{q}{2} \equiv x^2-px-1 \Rightarrow p=2\,,\ q=2 \Rightarrow pq=4$$

۱۵۴ **۱** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2-2x-4=0$ باشند، داریم:

$$x_1+x_2=2 \quad (*) \quad , \quad x_1x_2=-4 \quad (**)$$

حال معادلهٔ جدیدی می‌خواهیم که x_1^2 و x_2^2 ریشه‌های آن باشند. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S'=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2 \xlongequal[(**)]{(*)} 2^2-2(-4)=12 \\ P'=x_1^2\,x_2^2=(x_1x_2)^2 \xlongequal{(**)} (-4)^2=16 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-12x+16=0$$

با متحد قرار دادن $x^2-12x+16$ با x^2+mx+n، $m=-12$ و $n=16$ است، پس $n-m=16-(-12)=28$ می‌باشد.

۱۵۵ **۳**

$$2x^2-3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}=\dfrac{-(-3)}{2}=\dfrac{3}{2} \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}=\dfrac{-4}{2}=-2 \end{cases}$$

ریشه‌های معادلهٔ موردنظر عبارتند از $\alpha'=\frac{1}{\alpha}+1$ و $\beta'=\frac{1}{\beta}+1$، پس:

$$\begin{cases} S=\alpha'+\beta'=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+2=\dfrac{\frac{3}{2}}{-2}+2=\dfrac{5}{4} \\ P=\alpha'\beta'=\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+1=\dfrac{-1}{2}+\left(\dfrac{-3}{4}\right)+1=\dfrac{-1}{4} \end{cases}$$

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}=0 \xRightarrow{\times 4} 4x^2-5x-1=0$$

۱۵۶ **۴** اگر ریشه‌های این معادله را α و β بنامیم، داریم:

$$2x^2-3x-1=0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta=\dfrac{c}{a}=-\dfrac{1}{2} \\ \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

معادله‌ای که ریشه‌های آن از معکوس ریشه‌های معادلهٔ اولیه یک واحد کم‌تر است به صورت زیر خواهد بود:

$$\left\{\frac{1}{\alpha}-1, \frac{1}{\beta}-1\right\}$$

$$S'=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)+\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}-2=-5$$

$$P'=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\left(\frac{1}{\beta}-1\right)=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+1=\frac{1}{\alpha\beta}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+1 \Rightarrow P'=\frac{1}{-\frac{1}{2}}-(-3)+1=2$$

با توجه به رابطهٔ $x^2-S'x+P'=0$ می‌توانیم معادلهٔ مورد نظر را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} S'=-5 \\ P'=2 \end{cases} \Rightarrow x^2+5x+2=0$$

۱۵۷ **۲** در معادلهٔ درجه دوم $ax^{2}+bx+c=0$ اگر $a+c=b$ باشد، یکی از ریشه‌ها -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است. همچنین اگر $a+b+c=0$ باشد، یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است و برعکس. چون یک ریشهٔ معادلهٔ اول $\alpha=-1$ و در نتیجه یک ریشهٔ معادلهٔ دوم $\frac{1}{\alpha^{2}}=1$ می‌باشد، لذا باید مجموع ضرایب معادلهٔ دوم صفر باشد:

$$4+(-k)+25=0 \Rightarrow k=29$$

۱۵۸ **۲** اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^{2}+bx+c=0$ باشند، داریم:

$$S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \quad , \quad P=\alpha.\beta=\frac{c}{a}$$

با مرتب کردن معادلهٔ داده‌شده به معادلهٔ $2x^{2}-3x-1=0$ می‌رسیم. بنابراین:

$$S=\alpha+\beta=\frac{3}{2} \quad , \quad P=\alpha.\beta=-\frac{1}{2}$$

همچنین اگر S و P به‌ترتیب حاصل‌جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها باشند، معادلهٔ موردنظر را می‌توان به‌صورت $x^{2}-Sx+P=0$ نوشت. ریشه‌های معادلهٔ $8x^{2}+kx-1=0$، $\alpha\beta^{2}$ و $\alpha^{2}\beta$ هستند. داریم:

$$S_{\text{جدید}}=\alpha^{2}\beta+\alpha\beta^{2}=\alpha\beta(\alpha+\beta)=P.S=\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{4}$$

$$P_{\text{جدید}}=\alpha^{2}\beta.\alpha\beta^{2}=\alpha^{3}\beta^{3}=(\alpha\beta)^{3}=P^{3}=(-\frac{1}{2})^{3}=-\frac{1}{8}$$

بنابراین معادلهٔ متناظر به‌صورت $x^{2}+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}=0$ می‌باشد. با ضرب طرفین معادله در عدد ۸، این معادله به‌صورت $8x^{2}+6x-1=0$ در می‌آید و لذا $k=6$ است.

۱۵۹ **۲**

$$x_1+x_2=2 \quad (*) \quad , \quad x_1x_2=-9 \quad (**)$$

$$\begin{cases} S'=2x_1+x_2+2x_2+x_1=3(x_1+x_2)\overset{(*)}{=\!=}3(2)=6 \\ P'=(2x_1+x_2)(2x_2+x_1)=4x_1x_2+2x_1^{2}+2x_2^{2}+x_1x_2=2(x_1^{2}+x_2^{2})+5x_1x_2 \\ =2((x_1+x_2)^{2}-2x_1x_2)+5x_1x_2=2(x_1+x_2)^{2}+x_1x_2\underset{(*)}{\overset{(**)}{=\!=}}2(2)^{2}-9=-1 \end{cases} \Rightarrow x^{2}-6x-1=0$$

با متحد قرار دادن $x^{2}+Ax+B$ و $x^{2}-6x-1$، داریم $B=-1$ و $A=-6$ و لذا $A+B=-7$.

۱۶۰ **۴**

$$x_1+x_2=4 \quad (*) \quad , \quad x_1x_2=1 \quad (**)$$

$$\begin{cases} S'=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{S+2\sqrt{P}}\underset{(**)}{\overset{(*)}{=\!=}}\sqrt{4+2\sqrt{1}}=\sqrt{6} \\ P'=\sqrt{x_1}\times\sqrt{x_2}=\sqrt{x_1\times x_2}\overset{(**)}{=\!=}\sqrt{1}=1 \end{cases} \Rightarrow x^{2}-\sqrt{6}x+1=0$$

۱۶۱ **۳** **روش اول:** اگر α و β جواب‌های معادلهٔ $(a-1)x^{2}+bx=1$ باشند، معادلهٔ جدیدی می‌خواهیم که جواب‌هایش $-\frac{1}{\alpha}$ و $-\frac{1}{\beta}$ باشند.

بنابراین داریم:

$$(a-1)x^{2}+bx-1=0 \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{-b}{a-1} \quad , \quad \alpha\beta=\frac{-1}{a-1}$$

برای معادلهٔ جدید با فرض $X_1=\frac{-1}{\alpha}$ و $X_2=\frac{-1}{\beta}$، داریم:

$$\begin{cases} S'=X_1+X_2=-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{\frac{-b}{a-1}}{\frac{-1}{a-1}}=-b \\ P'=X_1\times X_2=-\frac{1}{\alpha}\times-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{a-1}{-1}=-a+1 \end{cases} \Rightarrow x^{2}-(-b)x+(-a+1)=0 \Rightarrow x^{2}+bx+1=a$$

روش دوم: می‌دانیم معادلهٔ جدیدی که جواب‌های آن عکس جواب‌های معادلهٔ $ax^{2}+bx+c=0$ باشند، معادلهٔ $cx^{2}+bx+a=0$ است. همچنین معادلهٔ جدیدی که جواب‌های آن قرینهٔ جواب‌های معادلهٔ $ax^{2}+bx+c=0$ باشد، معادلهٔ $ax^{2}-bx+c=0$ است. می‌خواهیم معادلهٔ جدیدی بنویسیم که جواب‌هایش عکس و قرینهٔ جواب‌های معادلهٔ $(a-1)x^{2}+bx-1=0$ باشد. داریم:

$$(-1)x^{2}-bx+a-1=0 \xrightarrow{\times(-1)} x^{2}+bx+1=a$$

۱۶۲ ۲ فرض می‌کنیم x_1, x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 2x - 1 = 0$ هستند و x_1', x_2' ریشه‌های معادله‌ای هستند که می‌خواهیم تشکیل دهیم. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x_1' + x_2' = x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP \xrightarrow[P=-1]{S=2} 2^3 - 3(2)(-1) = 8 + 6 = 14 \\ x_1' x_2' = x_1^3 x_2^3 = (x_1 x_2)^3 = (-1)^3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{معادلهٔ جدید}: x^2 - 14x - 1 = 0 \Rightarrow \text{مجموع ضرایب} = 1 - 14 - 1 = -14$$

۱۶۳ ۱ با فرض $x - 1 = t$ داریم:

$$t^2 + 2\sqrt{3}t - 6 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - (1)(-6)}}{1} \Rightarrow t_{1,2} = -\sqrt{3} \pm 3$$

ریشهٔ بزرگ‌تر به‌صورت $-\sqrt{3} + 3$ است، لذا داریم:

$$t = -\sqrt{3} + 3 \xrightarrow{t = x - 1} x - 1 = -\sqrt{3} + 3 \Rightarrow x = 4 - \sqrt{3}$$

۱۶۴ ۲

$$(x^2 + x + 1)^2 + 3(x^2 + x + 1) - 4 = 0 \xrightarrow{t = x^2 + x + 1} t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \quad (*) \\ t_2 = -4 \quad (**) \end{cases}$$

$$(*) \Rightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = -1$$

$$(**) \Rightarrow x^2 + x + 1 = -4 \Rightarrow x^2 + x + 5 = 0 \xrightarrow{\Delta \text{ منفی است.}} \text{ریشه ندارد.}$$

بنابراین معادله در مجموع دو ریشه دارد.

۱۶۵ ۳ معادله را از روش تغییر متغیر حل می‌کنیم:

$$(x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - 12 = 0 \xrightarrow{x^2 - x = t} t^2 - t - 12 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = x^2 - x = 4 \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \text{۲ ریشه} \\ t = x^2 - x = -3 \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0 \xrightarrow{\Delta < 0} \text{ریشه ندارد.} \end{cases}$$

بنابراین، این معادله در مجموع دارای ۲ ریشه می‌باشد.

۱۶۶ ۱ معادله را با روش تغییر متغیر حل می‌کنیم:

$$(x^2 + 1)^2 - 7(x^2 + 1) + 12 = 0 \xrightarrow{x^2 + 1 = t} t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow (t - 4)(t - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = x^2 + 1 = 4 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_1, x_2 = \pm\sqrt{3} \\ t = x^2 + 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1, x_2 = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ داده شده در مجموع چهار ریشه دارد.

۱۶۷ ۴

یادآوری: $x + \frac{1}{x} = k$ حالات زیر را دارد:

$|k| = 2 \Leftarrow$ معادله یک جواب هم‌علامت با k دارد.

$|k| < 2 \Leftarrow$ معادله جواب حقیقی ندارد.

$|k| > 2 \Leftarrow$ معادله دو جواب هم‌علامت با k دارد.

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \xrightarrow{x + \frac{1}{x} = t} t^2 + 3t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \simeq \frac{-3 \pm 3/5}{2} \Rightarrow t_1 \simeq -3/25 \ , \ t_2 \simeq 0/25$$

اکنون معادله‌های $x + \frac{1}{x} = -3/25$ و $x + \frac{1}{x} = 0/25$ را حل می‌کنیم. با توجه به یادآوری، $x + \frac{1}{x} = -3/25$ دارای دو جواب حقیقی منفی و $x + \frac{1}{x} = 0/25$ فاقد جواب است. بنابراین معادله دارای دو جواب حقیقی منفی است.

۱۶۸ ۲

$$(x - \sqrt{x})^2 - \frac{11}{10}(x - \sqrt{x}) + \frac{1}{10} = 0 \xrightarrow{x - \sqrt{x} = t} t^2 - \frac{11}{10}t + \frac{1}{10} = 0 \Rightarrow t_1 = 1 \ , \ t_2 = \frac{1}{10}$$

اکنون به حل دو معادلهٔ $x - \sqrt{x} = 0/1$ و $x - \sqrt{x} = 1$ می‌پردازیم. با فرض $\sqrt{x} = u$ داریم:

$$x - \sqrt{x} = 0/1 \Rightarrow x - \sqrt{x} - 0/1 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x} = u} u^2 - u - 0/1 = 0$$

معادلهٔ فوق دو جواب مختلف‌العلامه دارد. با توجه به این‌که $\sqrt{x}$ عدد نامنفی است، فقط ریشهٔ مثبت آن قابل قبول است. لذا در این حالت یک ریشه دارد.

$$x - \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x - \sqrt{x} - 1 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x} = u} u^2 - u - 1 = 0$$

در این حالت نیز معادلهٔ فوق دو جواب مختلف‌العلامه دارد که فقط جواب مثبت آن قابل قبول است. بنابراین معادلهٔ $(x-\sqrt{x})^۲-\frac{۱۱}{۱۰}(x-\sqrt{x})+\frac{۱}{۱۰}=۰$، مجموعاً دو جواب دارد.

تمرین: معادلهٔ $(x-\sqrt{x})^۲-\frac{۹}{۱۵}(x-\sqrt{x})-\frac{۱}{۱۰}=۰$ چند جواب حقیقی دارد؟

پاسخ: سه جواب

۱۶۹ **۲** معادله را از روش تغییر متغیر، حل می‌کنیم. داریم:

$$(x^۲+x)^۲-۱۸(x^۲+x)+۷۲=۰ \xrightarrow{x^۲+x=t} t^۲-۱۸t+۷۲=۰ \Rightarrow (t-۶)(t-۱۲)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=x^۲+x=۱۲ \Rightarrow x^۲+x-۱۲=۰ \xrightarrow{\text{۲ ریشهٔ حقیقی متمایز}} x_۱+x_۲=-۱ \\ t=x^۲+x=۶ \Rightarrow x^۲+x-۶=۰ \xrightarrow{\text{۲ ریشهٔ حقیقی متمایز}} x_۳+x_۴=-۱ \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها}=x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=-۲$$

۱۷۰ **۴** طرفین تساوی $x=\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}$ را به توان دو می‌رسانیم. داریم:

$$x^۲=(\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow x^۲=۳+۸+۴\sqrt{۶} \Rightarrow x^۲-۱۱=۴\sqrt{۶} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (x^۲-۱۱)^۲=(۴\sqrt{۶})^۲ \Rightarrow x^۴-۲۲x^۲+۱۲۱=۹۶$$

$$\Rightarrow x^۴-۲۲x^۲+۲۵=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۲۲ \\ b=۲۵ \end{cases} \Rightarrow a+b=۲۵-۲۲=۳$$

۱۷۱ **۳** با تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ داریم:

$$x-۲\sqrt{x}+m-۱=۰ \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^۲-۲t+m-۱=۰$$

معادلهٔ $x-۲\sqrt{x}+m-۱=۰$ در صورتی دو جواب متمایز دارد که معادلهٔ $t^۲-۲t+m-۱=۰$ دارای دو جواب نامنفی متمایز باشد.

$$\text{شرط وجود دو جواب}: \begin{cases} \Delta>۰ \Rightarrow ۴-۴(m-۱)>۰ \Rightarrow ۸-۴m>۰ \Rightarrow m<۲ \\ \frac{c}{a}\geq ۰ \Rightarrow \frac{m-۱}{۱}\geq ۰ \Rightarrow m\geq ۱ \\ -\frac{b}{a}>۰ \Rightarrow -\frac{-۲}{۱}>۰ \Rightarrow \text{برقرار است.} \end{cases} \xRightarrow{\cap} ۱\leq m<۲$$

۱۷۲ **۲**

$$x^۴-(m+۲)x^۲+m+۵=۰ \xrightarrow{x^۲=t} t^۲-(m+۲)t+m+۵=۰$$

معادلهٔ $x^۴-(m+۲)x^۲+m+۵=۰$ در صورتی دارای چهار ریشهٔ حقیقی متمایز است که معادلهٔ $t^۲-(m+۲)t+m+۵=۰$ دارای دو ریشهٔ حقیقی مثبت متمایز باشد. داریم:

$$\text{شرط وجود دو ریشهٔ حقیقی مثبت متمایز}: \begin{cases} \Delta>۰ \Rightarrow (-(m+۲))^۲-۴\times۱\times(m+۵)>۰ \Rightarrow m^۲>۱۶ \Rightarrow m>۴ \text{ یا } m<-۴ \\ \frac{c}{a}>۰ \Rightarrow \frac{m+۵}{۱}>۰ \Rightarrow m>-۵ \\ \frac{-b}{a}>۰ \Rightarrow \frac{m+۲}{۱}>۰ \Rightarrow m>-۲ \end{cases} \xRightarrow{\cap} m>۴$$

۱۷۳ **۱** **روش اول:** چون $x=m$ یکی از صفرهای تابع است، بنابراین باید $f(m)=۰$ باشد. داریم:

$$f(m)=m^۲-(۳m+۱)m+۳=۰ \Rightarrow -۲m^۲-m+۳=۰ \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} m=۱ \\ m=-\frac{۳}{۲}\notin \mathbb{N} \text{ غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=x^۲-(۳\times۱+۱)x+۳=x^۲-۴x+۳ \Rightarrow f(x)=(x-۱)(x-۳)=۰ \Rightarrow x=۳: \text{صفر دیگر}$$

تنها در گزینهٔ (۱) به ازای $m=۱$، صفر دیگر تابع ۳ به‌دست می‌آید.

روش دوم:

$$f(x)=x^۲-(۳m-۱)x+۳ \Rightarrow x_۱+x_۲=-\frac{b}{a}=۳m+۱ \quad (*)$$

یکی از صفرهای تابع $x_۱=m$ است. در نتیجه:

$$(*) \Rightarrow m+x_۲=۳m+۱ \Rightarrow x_۲=۲m+۱$$

۱۷۴ **۲** چون $x=۱$ یک صفر تابع $f(x)$ است، بنابراین $f(۱)=۰$ می‌شود. داریم:

$$f(۱)=۰ \Rightarrow ۱+۱+a+۱=۰ \Rightarrow a=-۳$$

حال با تقسیم عبارت x^3+x^2-3x+1 بر $x-1$ داریم:

$$\begin{array}{l|l} x^3+x^2-3x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2 & x^2+2x-1 \Rightarrow x^3+x^2-3x+1=(x^2+2x-1)(x-1) \\ \hline \quad 2x^2-3x & \\ \quad -2x^2+2x & \\ \hline \quad -x+1 & \\ \quad\ x-1 & \\ \hline \qquad 0 & \end{array}$$

پس دو صفر دیگر تابع از حل معادلهٔ $x^2+2x-1=0$ حاصل می‌شوند که مجموع معکوس دو صفر دیگر، با فرض این که α و β باشند، برابر است با:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{S}{P}=\frac{-2}{-1}=2$$

۱۷۵ **۱** می‌دانیم نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ همواره پایین محور xها است اگر $a<0$ و $\Delta<0$ باشد. داریم:

$$\begin{cases} a<0 \Rightarrow m-1<0 \Rightarrow m<1 \quad (*) \\ \Delta<0 \Rightarrow 3-4m(m-1)<0 \Rightarrow -4m^2+4m+3<0 \Rightarrow 4m^2-4m-3>0 \Rightarrow (2m+1)(2m-3)>0 \Rightarrow m<-\frac{1}{2} \quad m>\frac{3}{2} \quad (**) \end{cases}$$

$$(*)\bigcap(**) \Rightarrow m<-\frac{1}{2}$$

۱۷۶ **۴** نمودار تابع $y=ax^2+bx+c$ همواره بالای محور xهاست اگر $a>0$ و $\Delta<0$ باشد. داریم:

$$\begin{cases} a>0 \Rightarrow m+2>0 \Rightarrow m>-2 \quad (*) \\ \Delta<0 \Rightarrow \Delta'<0 \Rightarrow (-m)^2-(m+2)\times 1<0 \Rightarrow m^2-m-2<0 \Rightarrow (m+1)(m-2)<0 \Rightarrow -1<m<2 \quad (**) \end{cases}$$

$$(*)\bigcap(**) \Rightarrow -1<m<2$$

۱۷۷ **۳** باید $a>0$ و $\Delta=0$ باشد. داریم:

$$\begin{cases} m-2>0 \Rightarrow m>2 \quad (*) \\ \Delta=0 \Rightarrow (-3)^2-4(m-2)(m+2)=0 \Rightarrow 9-4m^2+16=0 \Rightarrow m^2=\frac{25}{4} \Rightarrow m=\pm\frac{5}{2} \xRightarrow{(*)} m=\frac{5}{2} \end{cases}$$

۱۷۸ **۲** اولاً به ازای $m=1$ عبارت $(m-1)x^2+6x+2m+1$ تبدیل به $6x+3$ می‌شود که معادلهٔ یک خط می‌باشد و لزوماً برای هر x دلخواه مثبت نیست.

ثانیاً برای این‌که عبارت درجه دوم ax^2+bx+c همواره مثبت باشد، باید $a>0$ و $\Delta<0$ $(\Delta'<0)$ باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} m-1>0 \Rightarrow m>1 \qquad (*) \\ \Delta'<0 \Rightarrow 9-(m-1)(2m+1)<0 \Rightarrow 9-2m^2+m+1<0 \Rightarrow 2m^2-m-10>0 \Rightarrow (2m-5)(m+2)>0 \\ \Rightarrow m<-2 \text{ یا } m>\frac{5}{2} \quad (**) \end{cases}$$

از اشتراک روابط $(*)$ و $(**)$، $m>\frac{5}{2}$ یا $m>2/5$ به‌دست می‌آید.

۱۷۹ **۳** می‌دانیم شرط آن‌که عبارت درجه دوم ax^2+bx+c برای هر x منفی باشد، آن است که $a<0$ و $\Delta<0$. بنابراین برای عبارت $(a-1)x^2+(a-1)x+1$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a-1<0 \Rightarrow a<1 \qquad (*) \\ \Delta<0 \Rightarrow (a-1)^2-4(a-1)<0 \Rightarrow (a-1)(a-1-4)<0 \Rightarrow (a-1)(a-5)<0 \Rightarrow 1<a<5 \qquad (**) \end{cases}$$

عدد a باید هم در مجموعه جواب $(*)$ و هم در مجموعه جواب $(**)$ صدق کند، که این امر ممکن نیست. پس برای a هیچ مقداری یافت نمی‌شود.

۱۸۰ **۱** **روش اول:** Δ باید صفر باشد:

$$y=\left(3-\frac{x}{m}\right)(mx-1)=-x^2+\left(\frac{1}{m}+3m\right)x-3$$

$$\Delta=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{m}+3m\right)^2-4\times(-1)(-3)=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{m}+3m\right)^2=12 \Rightarrow \frac{1}{m}+3m=\pm 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m}+3m=2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1+3m^2}{m}=2\sqrt{3} \Rightarrow 3m^2-2\sqrt{3}m+1=0 \Rightarrow (\sqrt{3}m-1)^2=0 \Rightarrow m=\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{m}+3m=-2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1+3m^2}{m}=-2\sqrt{3} \Rightarrow 3m^2+2\sqrt{3}m+1=0 \Rightarrow (\sqrt{3}m+1)^2=0 \Rightarrow m=-\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

روش دوم: نمودار تابع $y=\left(۳-\frac{x}{m}\right)(mx-۱)$ زمانی بر محور x ها مماس می‌شود که دو معادلهٔ $mx-۱=۰$ و $۳-\frac{x}{m}=۰$ ریشه‌های یکسان داشته باشند. داریم:

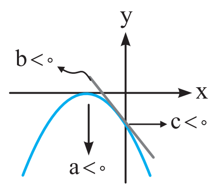
$$\begin{cases} mx-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{m} \\ ۳-\frac{x}{m}=۰ \Rightarrow x=۳m \end{cases} \Rightarrow \frac{۱}{m}=۳m \Rightarrow m^۲=\frac{۱}{۳} \Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۱۸۱ **۲** نمودار داده شده بر محور x ها در سمت چپ محور y ها مماس است، لذا دلتای معادلهٔ تابع برابر با صفر است. داریم:

$$y=۹x^۲-(a+۶)x+۱ \xrightarrow{\Delta=۰} (-(a+۶))^۲-۴\times۹\times۱=۰ \Rightarrow (a+۶)^۲=۳۶ \Rightarrow a+۶=\pm۶ \begin{cases} a=۰ \\ a=-۱۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-۱۲ \Rightarrow y=۹x^۲+۶x+۱=(۳x+۱)^۲ \Rightarrow \text{رأس سمت چپ محور y ها است.} \Rightarrow \text{قابل قبول} \\ a=۰ \Rightarrow y=۹x^۲-۶x+۱=(۳x-۱)^۲ \Rightarrow \text{رأس سمت راست محور y ها است.} \Rightarrow \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

۱۸۲ **۱** **روش اول:** با توجه به این‌که دهانهٔ سهمی رو به پایین است، بنابراین $a<۰$ می‌باشد.

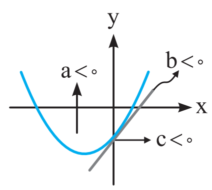


با توجه به این‌که سهمی، محور عرض‌ها را در پایین محور x ها قطع می‌کند، بنابراین $c<۰$ است.

با توجه به این‌که سهمی، محور عرض‌ها را با شیب منفی قطع می‌کند، بنابراین $b<۰$ است. در نتیجه گزینهٔ (۱) درست است.

روش دوم: عرض از مبدأ برابر ۱- می‌باشد، پس گزینهٔ (۳) نادرست است. از طرفی نقطهٔ $\left|\begin{smallmatrix}-۱\\۰\end{smallmatrix}\right.$ رأس سهمی می‌باشد، لذا گزینه‌های (۲) و (۴) نیز نادرست‌اند. در نتیجه گزینهٔ (۱) درست است.

۱۸۳ **۲** **روش اول:** با توجه به این‌که دهانهٔ سهمی رو به بالا است، بنابراین $a>۰$ می‌باشد.



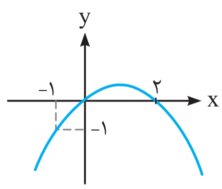
با توجه به این‌که سهمی، محور y ها را پایین محور x ها قطع می‌کند، بنابراین $c<۰$ است.

با توجه به این‌که سهمی، محور عرض‌ها را با شیب مثبت قطع می‌کند، بنابراین $b>۰$ است.

تنها گزینهٔ (۲) دارای این ویژگی‌ها است.

روش دوم: $x=۱$ و $x=-۲$ باید ریشه‌های تابع باشند، پس فقط گزینهٔ (۲) قابل قبول است.

۱۸۴ **۲** **روش اول:** با توجه به نمودار مقابل، اگر $f(x)=ax^۲+bx+c$ باشد، $f(۰)=۰$ ، $f(۲)=۰$ و $f(-۱)=-۱$ است. داریم:



$$\begin{cases} f(۰)=۰ \Rightarrow a\times۰+b\times۰+c=۰ \Rightarrow c=۰ \quad (*) \\ f(۲)=۰ \Rightarrow ۴a+۲b+c=۰ \xrightarrow{(*)} ۴a+۲b=۰ \\ f(-۱)=-۱ \Rightarrow a-b+c=-۱ \xrightarrow{(*)} a-b=-۱ \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}, b=\frac{۲}{۳} \quad (**)$$

$$(*), (**) \Rightarrow a+۳b-c=-\frac{۱}{۳}+۲-۰=\frac{۵}{۳}$$

روش دوم: با توجه به این‌که $x=۰$ و $x=۲$ دو ریشهٔ تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ است، بنابراین معادلهٔ آن را می‌توان به‌صورت $f(x)=a(x)(x-۲)$ در نظر گرفت. داریم:

$$f(x)=a(x)(x-۲) \xrightarrow{f(-۱)=-۱} -۱=a(-۱)(-۱-۲) \Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}(*)$$

$$f(x)=-\frac{۱}{۳}(x)(x-۲)=-\frac{۱}{۳}x^۲+\frac{۲}{۳}x+۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{۱}{۳} \\ b=\frac{۲}{۳} \\ c=۰ \end{cases} \Rightarrow a+۳b-c=\frac{۵}{۳}$$

۱۸۵ **۱** با توجه به این‌که $x=۰$ تنها صفر تابع $y=ax^۳+bx^۲-۴x$ است، بنابراین معادلهٔ $ax^۳+bx^۲-۴x=۰$ باید فقط همین یک جواب را داشته و جواب دیگری نداشته باشد. بنابراین:

$$ax^۳+bx^۲-۴x=۰ \Rightarrow x(\underbrace{ax^۲+bx-۴}_{\text{این معادله جواب ندارد.}})=۰$$

معادلهٔ $ax^۲+bx-۴=۰$ باید جواب نداشته باشد، به عبارت دیگر باید دلتای معادله منفی باشد. با توجه به این‌که در معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، اگر $\frac{c}{a}<۰$ باشد معادله حتماً دو ریشه دارد، باید $\frac{c}{a}>۰$ باشد تا بتواند شرایط منفی بودن دلتا فراهم آید. پس باید $\frac{-۴}{a}>۰$، لذا $a<۰$ باشد. بنابراین جواب باید یکی از گزینه‌های (۱) یا (۲) باشد، در نتیجه معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx-۴=۰$ به اجبار به یکی از دو صورت $-x^۲+۶x-۴=۰$ یا به‌صورت $-x^۲+۳x-۴=۰$ است. با توجه به این‌که دلتای معادلهٔ $-x^۲+۶x-۴=۰$ مثبت است، لذا قابل قبول نمی‌باشد. اما دلتای معادلهٔ $-x^۲+۳x-۴=۰$ منفی است و با این شرط که معادله جواب ندارد، مطابقت دارد. بنابراین جواب گزینهٔ (۱) است.

۱۸۶ **۱** تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$، از هر چهار ناحیه عبور می‌کند هرگاه دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه باشد، به عبارت دیگر $\frac{c}{a} < ۰$ شود:

$$\frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{m+۲} < ۰ \Rightarrow m < -۲$$

۱۸۷ **۲**

$$\frac{c}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{m-۲}{۱-m} < ۰ \Rightarrow \frac{m-۲}{m-۱} > ۰ \Rightarrow m > ۲ \text{ یا } m < ۱$$

با شرط $m < ۱$ یا $m > ۲$، نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند. اما با شرط $a < ۰$، دهانهٔ نمودار رو به پایین بوده و دارای ماکزیمم خواهد بود، لذا $۱ - m < ۰ \Rightarrow m > ۱$. با اشتراک‌گیری داریم:

$$\begin{cases} m > ۲ \text{ یا } m < ۱ \\ m > ۱ \end{cases} \xRightarrow{\cap} m > ۲$$

۱۸۸ **۳** نمودار تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$، با شرط $a > ۰$، الزاماً از ناحیه‌های اول و دوم و با شرط $a < ۰$، الزاماً از ناحیه‌های سوم و چهارم عبور می‌کند. بنابراین باید $a < ۰$ باشد. (دو گزینهٔ (۱) و (۲) نادرست هستند.)

$x = ۰$ یک ریشهٔ معادلهٔ $ax^۲ - (a+۲)x = ۰$ است. ریشهٔ دیگر باید نامنفی باشد تا سهمی از ناحیهٔ دوم عبور نکند. لذا داریم:

$$ax^۲ - (a+۲)x = ۰ \Rightarrow x(ax - (a+۲)) = ۰ \Rightarrow x_۱ = ۰ \ , \ x_۲ = \frac{a+۲}{a}$$

پس باید $\frac{a+۲}{a} \geq ۰$ باشد. با تعیین علامت عبارت $\frac{a+۲}{a}$ و این‌که $a < ۰$ است، به $a \leq -۲$ می‌رسیم.

تذکر۱: اگر $a < -۲$ باشد، نمودار تابع درجه دوم داده شده فقط از ناحیهٔ دوم نمی‌گذرد. اما اگر $a = -۲$ باشد، این نمودار از نواحی اول و دوم نمی‌گذرد.

تذکر۲: اگر $a = ۰$ باشد، معادلهٔ تابع به صورت $y = -۲x$ می‌شود، که این تابع خطی از ناحیهٔ دوم می‌گذرد.

۱۸۹ **۲** برای این‌که نمودار تابع $y = mx^۲ + (m-۱)x$، از ناحیهٔ سوم نگذرد، باید دارای می‌نیمم باشد. برای این‌کار باید ضریب $x^۲$ عددی مثبت باشد، یعنی $m > ۰$. هم‌چنین باید ریشه‌های معادلهٔ داده شده در صورت وجود نامنفی باشند. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} m > ۰ \\ S \geq ۰ \Rightarrow -(\frac{m-۱}{m}) \geq ۰ \Rightarrow \frac{m-۱}{m} \leq ۰ \Rightarrow ۰ < m \leq ۱ \\ P \geq ۰ \Rightarrow \frac{۰}{m} \geq ۰ \Rightarrow \text{همواره برقرار است.} \end{array}\right\} \xRightarrow{\cap} ۰ < m \leq ۱$$

در حالتی‌که $m = ۰$ باشد، ضابطهٔ تابع تبدیل به $y = -x$ می‌شود که در این حالت نیز از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند. بنابراین $۰ \leq m \leq ۱$ جواب سؤال است.

تمرین: در این تست، مجموعه مقادیر m برای این‌که نمودار تابع فقط از سه ناحیهٔ اول، دوم و چهارم بگذرد، کدام است؟

پاسخ: $۰ < m < ۱$

۱۹۰ **۱** **روش اول:**

> **نکته:** برای آن‌که تابع $y = ax^۲ + bx + c$ از ناحیهٔ اول مختصات نگذرد باید:
>
> اولاً: ضریب $x^۲$ عددی نامثبت باشد، یعنی $a \leq ۰$. (توجه داشته باشید که به ازای $a = ۰$، ضابطهٔ تابع مربوط به خط $y = bx + c$ خواهد شد که در صورتی از ناحیهٔ اول مختصات نمی‌گذرد که $b \leq ۰$ و $c \leq ۰$ باشد.)
>
> ثانیاً: اگر $\Delta \leq ۰$ باشد، آن‌گاه (با توجه به $a < ۰$) نمودار تابع به‌طور قطع از ناحیهٔ اول نخواهد گذشت.
>
> یا اگر $\Delta > ۰$ باشد، آن‌گاه تابع دو ریشهٔ متمایز خواهد داشت و (با توجه به $a < ۰$) در صورتی از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد که هر دو ریشه نامثبت باشند و لذا باید دو شرط زیر برقرار باشد:
>
> $$x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} < ۰ \text{ و } x_۱.x_۲ = \frac{c}{a} \geq ۰$$

با توجه به نکتهٔ فوق، برای تابع $y = (a-۳)x^۲ + ax - ۱$ که از ناحیهٔ اول مختصات نمی‌گذرد، پس خواهیم داشت:

$$۱) \ a - ۳ \leq ۰ \Rightarrow a \leq ۳$$

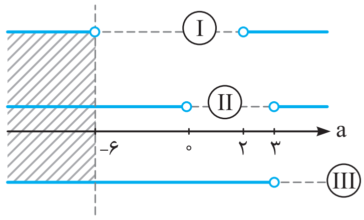
توجه: به ازای $a - ۳ = ۰$، یعنی $a = ۳$، ضابطهٔ تابع مربوط به خط $y = ۳x - ۱$ خواهد بود که از ناحیهٔ اول مختصات می‌گذرد، پس:

$$a < ۳ \qquad (۱)$$

$$۲) \ \Delta \leq ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴(a-۳)(-۱) = a^۲ + ۴a - ۱۲ \leq ۰ \Rightarrow (a+۶)(a-۲) \leq ۰ \Rightarrow -۶ \leq a \leq ۲ \quad (۲)$$

و یا:

$$\begin{cases} \Delta > ۰ & : \quad (a+۶)(a-۲) > ۰ \quad (I) \\ \dfrac{-b}{a} < ۰ & : \quad \dfrac{-a}{a-۳} < ۰ \quad (II) \\ \dfrac{c}{a} \geq ۰ & : \quad \dfrac{-۱}{a-۳} \geq ۰ \quad (III) \end{cases}$$



$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} a < -۶ \quad (۳)$$

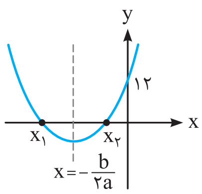
جواب آخر: (۱) اشتراک [(۲) اجتماع (۳)]:

$$(a<۳) \cap [\underbrace{(-۶ \leq a \leq ۲) \cup (a < -۶)}_{a \leq ۲}] = (a \leq ۲)$$

روش دوم: به ازای $a = ۲/۵$، تابع به‌صورت $f(x) = -\frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۵}{۲}x - ۱$ می‌شود که می‌توان آن را به‌صورت $y = \frac{۱}{۲}(-x^۲ + ۵x - ۲)$ در نظر گرفت. چون در آن $\Delta > ۰$، $P > ۰$ و $S > ۰$ است، لذا دارای دو ریشهٔ مثبت می‌باشد، پس از ربع‌های اول، سوم و چهارم قطعاً عبور می‌کند. بنابراین گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست‌اند.

به ازای $a = ۰$، تابع به‌صورت $f(x) = -۳x^۲ - ۱$ می‌باشد که از ربع‌های اول و دوم نمی‌گذرد، بنابراین $a = ۰$ قابل قبول است. در نتیجه گزینهٔ (۲) نیز نادرست است و جواب گزینهٔ (۱) می‌باشد.

۱۹۱ **۴** با توجه به این‌که در منحنی به معادلهٔ $y = (m-۲)x^۲ - ۲(m+۱)x + ۱۲$، مقدار ثابت $(c = ۱۲)$ مثبت است، اگر بخواهیم این منحنی محور xها را در ۲ نقطه به طول‌های منفی قطع کند، باید به صورت شکل مقابل ظاهر شود، پس باید داشته باشیم:



$$\begin{cases} a > ۰ \\ -\dfrac{b}{a} < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > ۰ \\ b > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-۲ > ۰ \Rightarrow m > ۲ \\ -۲(m+۱) > ۰ \Rightarrow m < -۱ \end{cases} \xRightarrow{\cap} \varnothing$$

پس به ازای هیچ مقدار m این منحنی نمی‌تواند محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع کند.

۱۹۲ **۳**

$$y = -x^۲ + ax + ۵ \xRightarrow[]{\text{طول رأس سهمی } x = -\frac{b}{۲a}} ۲ = \frac{-a}{۲ \times (-۱)} \Rightarrow a = ۴$$

معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = -x^۲ + ۴x + ۵$ است. این منحنی تنها از نقطهٔ $(۱,۸)$ (در بین گزینه‌ها) عبور می‌کند.

۱۹۳ **۳**

$$S(-\frac{b}{۲a}, -\frac{\Delta}{۴a}) \xRightarrow{\text{روی خط } y=x} -\frac{b}{۲a} = -\frac{\Delta}{۴a} \Rightarrow ۲b = \Delta \Rightarrow ۲ \times (-۳) = (-۳)^۲ - ۴ \times ۱ \times m \Rightarrow m = \frac{۱۵}{۴}$$

۱۹۴ **۱** می‌دانیم معادلهٔ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ برابر است با $x = -\frac{b}{۲a}$. داریم:

$$y = x^۲ + bx + c \xRightarrow{x=-۲} x = -\frac{b}{۲ \times ۱} = -۲ \Rightarrow b = ۴$$

بنابراین معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = x^۲ + ۴x + c$ است. از طرفی چون نمودار سهمی بر محور xها مماس است، باید $\Delta = ۰$ باشد. داریم:

$$\Delta = ۴^۲ - ۴ \times ۱ \times c = ۰ \Rightarrow c = ۴$$

معادلهٔ سهمی به‌صورت $y = x^۲ + ۴x + ۴$ است، در نتیجه این سهمی محور yها را در نقطه به عرض ۴ قطع می‌کند.

۱۹۵ **۴** معادلهٔ محور تقارن سهمی به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ به‌صورت $x = -\frac{b}{۲a}$ است و سهمی محور yها (عرض‌ها) را در نقطه‌ای به عرض c قطع می‌کند. طبق گفتهٔ مسأله، محور تقارن خط $x = ۱$ است، پس:

$$y = -۲x^۲ + bx + c \Rightarrow x = -\frac{b}{۲a} = \frac{-b}{۲(-۲)} = ۱ \Rightarrow \frac{-b}{-۴} = ۱ \Rightarrow b = ۴$$

عدد c عرض نقطهٔ تلاقی سهمی با محور yها یا عرض‌ها است که طبق اطلاعات مسأله این مقدار برابر ۳ است (یعنی $c = ۳$):

$$y = -۲x^۲ + bx + c \xRightarrow[c=۳]{b=۴} y = -۲x^۲ + ۴x + ۳$$

حالا $x = ۱$ را در عبارت جای‌گذاری می‌کنیم:

$$y = -۲(۱)^۲ + ۴(۱) + ۳ = -۲ + ۴ + ۳ = ۵$$

۱۹۶ **۳** در تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ طول نقطهٔ رأس سهمی $x = \frac{-b}{۲a}$ است. طبق فرض مسأله طول سهمی برابر ۱- است، پس:

$$-۱ = \frac{-a}{۲(۳)} \Rightarrow -۱ = \frac{-a}{۶} \Rightarrow a = ۶$$

حال $a=6$ را در معادله اصلی جایگزین می‌کنیم:

$$y = 3x^2 + 6x + b$$

باز هم طبق فرض مسأله عرض رأس سهمی یعنی y برابر -4 است پس:

$$y = 3x^2 + 6x + b \xrightarrow[y=-4]{x=-1} -4 = 3(-1)^2 + 6(-1) + b$$

$$-4 = 3 - 6 + b \Rightarrow -4 + 3 = b \Rightarrow b = -1$$

پس معادلهٔ سهمی به صورت $y = 3x^2 + 6x - 1$ است و عدد ثابت، یعنی (-1) عرض محل تلاقی سهمی با محور yها است.

۱۹۷ **۲** با توجه به این‌که $a=-1$ است، بنابراین دهانهٔ سهمی رو به پایین باز شده و لذا دارای بیشترین مقدار است. بنابراین ویژگی‌های گزینه‌های (۱) و (۳) را دارد. معادلهٔ خط محور تقارن $x = -\frac{b}{2a}$ است. با توجه به این‌که $S = -\frac{b}{a} = 2$ است، لذا $\frac{-b}{2a} = 1$ می‌شود. یعنی خط $x=1$ محور تقارن سهمی است، پس گزینهٔ (۲) نادرست بوده و جواب سؤال است. برای تکمیل حل، مختصات رأس را نیز به‌دست می‌آوریم:

$$\text{رأس سهمی} = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{b}{a} \times \frac{1}{2}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{S}{2}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\text{رأس سهمی} \xrightarrow[a=-1]{S=2,\ \Delta=16} \left(\frac{2}{2}, \frac{-16}{4\times(-1)}\right) = (1,4)$$

بنابراین مختصات رأس سهمی نیز درست بیان شده است و این سهمی ویژگی گزینهٔ (۴) را نیز دارد. (ضابطهٔ این سهمی را به‌عنوان تمرین به‌دست آورید.)

۱۹۸ **۳** بیشترین مقدار تابع درجه دوم همان مقدار y نقطهٔ رأس سهمی (یا $f(x)$) است. پس $f(x)=1$ و عرض نقطهٔ تلاقی سهمی با محور yها همان عدد ثابت معادله (یعنی c) است. پس:

$$f(x) = -x^2 + bx + c \xrightarrow{c=-3} f(x) = -x^2 + bx - 3$$

عرض نقطهٔ رأس سهمی از رابطهٔ $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ به‌دست می‌آید و با توجه به این‌که $y=1$ است، داریم:

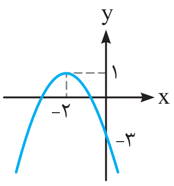
$$1 = \frac{4(-1)(-3) - b^2}{4(-1)} \xrightarrow[\text{وسطین}]{\text{طرفین}} -4 = 12 - b^2 \Rightarrow b^2 = 12 + 4 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

می‌دانیم طول رأس سهمی از رابطهٔ $x = \frac{-b}{2a}$ به‌دست می‌آید:

$$\text{اگر } b=4 \Rightarrow y = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

$x=2$ نمی‌تواند درست باشد، زیرا در صورت سؤال ذکر شده است که سهمی از ناحیهٔ اول نمی‌گذرد و چون عرض رأس سهمی مثبت است، پس طول نقطهٔ رأس سهمی نمی‌تواند مثبت باشد.

$$\text{اگر } b=-4 \Rightarrow y = -x^2 - 4x - 3 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(-1)} = \frac{4}{-2} = -2$$



$x=-2$ می‌تواند طول نقطهٔ رأس سهمی باشد که از ناحیهٔ اول نیز نمی‌گذرد.

۱۹۹ **۴** **روش اول:**

$$y = -5t^2 + 100t + 200 = -5(t^2 - 20t) + 200 = -5(t^2 - 20t + 100 - 100) + 200 = -5((t-10)^2 - 100) + 200 = -5(t-10)^2 + 700 \le 700$$

بیشترین ارتفاع موشک ۷۰۰ متر است.

روش دوم:

$$y = -5t^2 + 100t + 200 \xrightarrow[y_{max} = -\frac{\Delta}{4a}]{\text{ضریب } t^2 \text{ منفی است، ماکزیمم دارد.}} y_{max} = \frac{-(100^2 - 4\times(-5)\times(200))}{4\times(-5)} = \frac{10000 + 4000}{20} = \frac{14000}{20} = 700$$

روش سوم: می‌دانیم کم‌ترین یا بیشترین مقدار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ در نقطه به طول $-\frac{b}{2a}$ رخ می‌دهد. برای یافتن کم‌ترین یا بیشترین مقدار تابع، کافی است $x = -\frac{b}{2a}$ را در معادله قرار دهیم. داریم:

$$y = -5t^2 + 100t + 200 \xrightarrow[x_{max} = -\frac{b}{2a}]{\text{ضریب } t^2 \text{ منفی است، ماکزیمم دارد.}} x_{max} = -\frac{100}{2\times(-5)} = 10 \Rightarrow y_{max} = -5(10)^2 + 100\times 10 + 200 = 700$$

۲۰۰ **۳**

$$A = (x+3)(x-1) = x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 = (x+1)^2 - 4 \ge -4$$

بنابراین حداقل مقدار عبارت فوق -4 است. (حل با روش‌های دیگر، بر عهدهٔ خودتان)

۲۰۱ **۱** **روش اول:** می‌دانیم تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ با شرط $a > ۰$، دارای کم‌ترین مقدار و با شرط $a < ۰$ دارای بیشترین مقدار است. کم‌ترین مقدار یا بیشترین مقدار تابع درجه دوم (بسته به علامت a) برابر است با $\frac{-\Delta}{۴a}$. با توجه به این‌که بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+۳)x^۲ - ۴x + k$ برابر صفر است، لذا اولاً ضریب $x^۲$ عددی منفی و ثانیاً $\frac{-\Delta}{۴a} = ۰$ می‌باشد. داریم:

$$\begin{cases} a < ۰ \Rightarrow k+۳ < ۰ \Rightarrow k < -۳ \\ \frac{-\Delta}{۴a} = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰ \Rightarrow \Delta' = ۰ \Rightarrow (-۲)^۲ - k(k+۳) = ۰ \Rightarrow ۴ - k^۲ - ۳k = ۰ \Rightarrow k^۲ + ۳k - ۴ = ۰ \Rightarrow k = ۱ \text{ یا } k = -۴ \end{cases}$$

با توجه به این‌که $k < -۳$ است، لذا $k = -۴$ قابل‌قبول می‌باشد.

روش دوم: تابع درجه دوم $y = ax^۲ + bx + c$ با شرط $a < ۰$ دارای بیشترین مقدار است، لذا باید $k + ۳ < ۰$ باشد که تنها گزینهٔ (۱) این شرط را دارد.

۲۰۲ **۱** **روش اول:**

$$R(x) = ۴۸x - ۶x^۲ \Rightarrow R(x) = -۶(x^۲ - ۸x) = -۶(x^۲ - ۸x + ۱۶ - ۱۶) = -۶((x-۴)^۲ - ۱۶) = -۶(x-۴)^۲ + ۹۶ \leq ۹۶$$

عجله نکنید! بیشترین درآمد برابر با ۹۶ واحد است. اما متن سؤال قیمت فروش هر واحد کالا را می‌خواهد. این درآمد به ازای فروش ۴ واحد کالا اتفاق می‌افتد. بنابراین در این حالت، قیمت فروش هر واحد کالا $\frac{۹۶}{۴} = ۲۴$ واحد است.

روش دوم:

$$R(x) = ۴۸x - ۶x^۲ \xrightarrow[x_{max} = -\frac{b}{۲a}]{\text{ضریب } x^۲ \text{ منفی است، لذا ماکزیمم دارد.}} x_{max} = -\frac{۴۸}{۲ \times (-۶)} = ۴ \Rightarrow R_{max} = R(۴) = ۹۶$$

$$\text{قیمت فروش هر واحد کالا} = \frac{R_{max}}{x_{max}} = \frac{۹۶}{۴} = ۲۴$$

تذکر: روش $-\frac{\Delta}{۴a}$ در این مسأله توصیه نمی‌شود. (چرا؟)

۲۰۳ **۱** بیشترین مقدار xy خواسته شده است، بنابراین فرض می‌کنیم که $S = xy$ است و سپس آن را تک متغیره می‌کنیم. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S = xy \\ ۲x + y = a \Rightarrow y = a - ۲x \end{array}\right\} \Rightarrow S = x(a - ۲x) = -۲x^۲ + ax$$

اکنون دنبال بیشترین مقدار $S = -۲x^۲ + ax$ هستیم.

روش اول:

$$S(x) = -۲x^۲ + ax = -۲\left(x^۲ - \frac{a}{۲}x\right) = -۲\left(x^۲ - \frac{a}{۲}x + \frac{a^۲}{۱۶} - \frac{a^۲}{۱۶}\right) = -۲\left(\left(x - \frac{a}{۴}\right)^۲ - \frac{a^۲}{۱۶}\right) = -۲\left(x - \frac{a}{۴}\right)^۲ + \frac{a^۲}{۸} \leq \frac{a^۲}{۸}$$

روش دوم:

$$S(x) = -۲x^۲ + ax \xrightarrow[S_{max} = -\frac{\Delta}{۴a}]{\text{ضریب } x^۲ \text{ عددی منفی است، ماکزیمم دارد.}} S_{max} = -\frac{a^۲ - ۴ \times (-۲) \times ۰}{۴ \times (-۲)} = \frac{a^۲}{۸}$$

روش سوم:

$$S(x) = -۲x^۲ + ax \xrightarrow{x_{max} = -\frac{b}{۲a}} x_{max} = \frac{-a}{۲ \times (-۲)} = \frac{a}{۴} \Rightarrow S_{max} = S\left(\frac{a}{۴}\right) = -۲\left(\frac{a}{۴}\right)^۲ + a\left(\frac{a}{۴}\right) = \frac{a^۲}{۸}$$

توجه: می‌دانیم وقتی مجموع دو متغیر، برابر مقدار ثابتی است، حاصل‌ضرب آن‌ها زمانی دارای بیشترین مقدار است که دو متغیر با هم برابر باشند. با استفاده از این مطلب داریم:

$$۲x + y = a \Rightarrow \begin{cases} ۲x = \frac{a}{۲} \Rightarrow x = \frac{a}{۴} \\ y = \frac{a}{۲} \end{cases} \Rightarrow \max(۲xy) = \frac{a}{۴} \times \frac{a}{۲} = \frac{a^۲}{۸}$$

۲۰۴ **۱** دو عدد را x و y فرض می‌کنیم. با توجه به این‌که کم‌ترین مقدار حاصل‌ضرب آن‌ها خواسته شده است، بنابراین فرض می‌کنیم که $S = xy$ است و سپس با داده‌های مسأله آن را تک متغیره می‌کنیم. داریم:

$$\begin{cases} S = xy \\ ۲x = y + ۶ \Rightarrow y = ۲x - ۶ \end{cases} \Rightarrow S = x(۲x - ۶) = ۲x^۲ - ۶x$$

حاصل‌ضرب دو عدد برحسب x از رابطهٔ $S = ۲x^۲ - ۶x$ به‌دست می‌آید. با توجه به این‌که ضریب $x^۲$ عددی مثبت است، لذا دارای می‌نیمم است. می‌نیمم حاصل‌ضرب به ازای $x = -\frac{-۶}{۲ \times ۲} = \frac{۳}{۲}$ به‌دست می‌آید. توجه شود که در این حالت $\left(x = \frac{۳}{۲}\right)$، مقدار عدد دیگر یعنی y برابر است با $y = ۲ \times \frac{۳}{۲} - ۶ = -۳$. لذا مجموع دو عدد x و y برابر با $-\frac{۳}{۲}$ است.

تذکر مهم: چون حاصل‌ضرب قرار است می‌نیمم شود، لذا رابطهٔ $S = xy$ را نوشتیم و بعد از به‌دست آوردن x و y مناسب، مجموع آن‌ها را به‌دست آوردیم. دقت کنید که نباید به اشتباه رابطهٔ مجموع را بنویسید.

۲۰۵ **۲** اگر عدد موردنظر را x فرض کنیم، تابعی می‌نویسیم که اختلاف ۳ برابر آن عدد با مربعش را بدهد، یعنی $S = |۳x - x^۲|$. با توجه به این‌که x عددی است بین صفر و ۳، لذا $۳x$ بزرگ‌تر از $x^۲$ است. (چرا؟) بنابراین داریم:

$$S = |۳x - x^۲| \xrightarrow{۰<x<۳} S = ۳x - x^۲$$

بنابراین اگر x عددی بین صفر و ۳ باشد، اختلاف ۳ برابر آن عدد و مربعش، از رابطهٔ $S = ۳x - x^۲$ به‌دست می‌آید. لذا داریم:

$$S(x) = ۳x - x^۲ \Rightarrow x_{max} = -\frac{۳}{۲\times(-۱)} = \frac{۳}{۲}$$

بیشترین مقدار S، به ازای $x = \frac{۳}{۲}$ به‌دست آمد. این عدد $\left(x = \frac{۳}{۲}\right)$ بین عدد صفر و ۳ است، بنابراین قابل‌قبول می‌باشد. لذا داریم:

$$S(x) = ۳x - x^۲ \xrightarrow{x=\frac{۳}{۲}} S_{max} = S(\frac{۳}{۲}) = ۳(\frac{۳}{۲}) - (\frac{۳}{۲})^۲ = \frac{۹}{۴}$$

(مقدار S_{max} را از $\frac{-\Delta}{۴a}$ نیز می‌توانستیم به‌دست آوریم.)

۲۰۶ **۱** اگر طول مربع را x بگیریم، محیط آن $۴x$ و مساحت آن $x^۲$ است. محیط مربع کم‌تر از ۲ برابر مساحت آن نمی‌باشد، بنابراین داریم:

$$۴x \geq ۲x^۲ \Rightarrow ۲x \geq x^۲ \Rightarrow ۲x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow (۲-x)(x) \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۲$$

اما با توجه به این‌که طول ضلع مربع عددی مثبت است، لذا $۰ < x \leq ۲$ خواهد بود.

فزونی عدد محیط از عدد مساحت برابر است با $P = ۴x - x^۲$. برای یافتن بیشترین مقدار آن داریم:

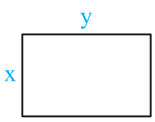
$$P(x) = ۴x - x^۲ \Rightarrow x_{max} = -\frac{۴}{۲(-۱)} = ۲$$

یعنی اگر $x = ۲$ باشد، مقدار فوق بیشترین مقدار خواهد بود. با توجه به این‌که $x = ۲$ در فاصلهٔ موردنظر $۰ < x \leq ۲$ قرار دارد، لذا داریم:

$$P(x) = ۴x - x^۲ \Rightarrow P_{max} = P(۲) = ۴\times۲ - (۲)^۲ = ۴$$

(مقدار P_{max} را از $\frac{-\Delta}{۴a}$ نیز می‌توانستیم به‌دست آوریم.)

۲۰۷ **۱**



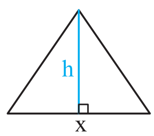
$$\begin{cases} S = xy \\ ۱۰۰ = ۲(x+y) \Rightarrow y = ۵۰ - x \end{cases} \Rightarrow S = (۵۰ - x)x = ۵۰x - x^۲$$

$$S = ۵۰x - x^۲ \Rightarrow x_{max} = -\left(\frac{۵۰}{۲\times(-۱)}\right) = ۲۵ \xrightarrow{y=۵۰-x} y = ۲۵$$

بنابراین اگر طول و عرض ۲۵ متر باشد، مساحت مستطیل بیشترین مقدار می‌شود.

نکته: از بین مستطیل‌هایی با محیط ثابت، مربع بیشترین مساحت را دارد.
از بین مستطیل‌هایی با مساحت ثابت، مربع کم‌ترین محیط را دارد.

۲۰۸ **۲** **روش اول:**



$$\left.\begin{array}{l} x + h = ۱۶ \Rightarrow h = ۱۶ - x \\ S = \frac{۱}{۲}xh \end{array}\right\} \Rightarrow S(x) = \frac{۱}{۲}x(۱۶ - x) \Rightarrow S(x) = -\frac{x^۲}{۲} + ۸x$$

$$\Rightarrow S_{max} = -\frac{\Delta}{۴a} = -\frac{(۸)^۲ - ۴\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)\times(۰)}{۴\times\left(-\frac{۱}{۲}\right)} = ۳۲$$

روش دوم: مجموع $x + h$ برابر مقدار ثابتی است، پس xh زمانی دارای ماکزیمم مقدار است که داشته باشیم:

$$x = h = \frac{۱۶}{۲} = ۸ \Rightarrow S = \frac{۱}{۲}xh = \frac{۱}{۲}\times۸\times۸ = ۳۲$$

۲۰۹ **۲** **روش اول:**

$$x + y = ۱۰ \Rightarrow y = ۱۰ - x$$

$$\max\sqrt{x.y} = \max\sqrt{x(۱۰ - x)} = \max\sqrt{۱۰x - x^۲}$$

برای به‌دست آوردن ماکزیمم عبارت $\sqrt{۱۰x-x^۲}$، کافی است ماکزیمم $۱۰x-x^۲$ را بیابیم. برای این منظور از رابطهٔ $\frac{-\Delta}{۴a}$، بیشترین مقـدار را به‌دست می‌آوریم:

$$\max=\frac{-(۱۰^۲-۴\times(-۱)\times ۰)}{۴\times(-۱)}=۲۵$$

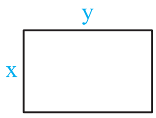
بیشترین مقدار عبارت $۱۰x-x^۲$ برابر ۲۵ است، در نتیجه ماکزیمم عبارت $\sqrt{۱۰x-x^۲}$ برابر $\sqrt{۲۵}=۵$ می‌باشد.

روش دوم: هرگاه حاصل‌جمع دو عدد مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها هنگامی ماکزیمم می‌شود که آن دو عدد، یکسان باشند.

در این تست، $x+y=۱۰$ می‌باشد، لذا $x.y$ وقتی ماکزیمم است که $x=y=۵$ باشد. بنابراین داریم:

$$\max(x.y)=۲۵\Rightarrow \max\sqrt{x.y}=\sqrt{۲۵}=۵$$

۲۱۰ | ۲ **روش اول:** اگر x و y طول ضلع‌های مستطیل باشند، $\sqrt{x^۲+y^۲}$ طول قطر آن است. با توجه بـه این‌کـه محیط مستطیل ۱۶ است، داریم:



$$\left.\begin{array}{l}S=\sqrt{x^۲+y^۲}\\ ۲(x+y)=۱۶\Rightarrow x+y=۸\Rightarrow y=۸-x\end{array}\right\}\Rightarrow S=\sqrt{x^۲+(۸-x)^۲}=\sqrt{۲x^۲-۱۶x+۶۴}$$

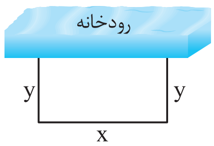
کم‌ترین مقدار $S=\sqrt{۲x^۲-۱۶x+۶۴}$ زمانی اتفاق می‌افتد که $S^۲=۲x^۲-۱۶x+۶۴$ کم‌ترین مقدار باشد.

$$S^۲=۲x^۲-۱۶x+۶۴\Rightarrow S^۲_{min}=-\frac{(-۱۶)^۲-۴\times ۲\times ۶۴}{۴\times ۲}=۳۲\Rightarrow S_{min}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$$

روش دوم:

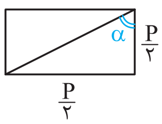
$$x+y=۸\Rightarrow \min\sqrt{x^۲+y^۲}\xrightarrow{x=y=۴}\sqrt{۱۶+۱۶}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$$

۲۱۱ | ۱



$$\left.\begin{array}{l}S=xy\\ x+۲y=P\Rightarrow x=P-۲y\end{array}\right\}\Rightarrow S=(P-۲y)y$$

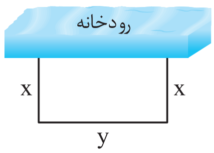
$$\Rightarrow S=-۲y^۲+Py\Rightarrow y_{max}=-\frac{P}{۲\times(-۲)}=\frac{P}{۴}\xrightarrow{x=P-۲y}x=P-۲(\frac{P}{۴})=\frac{P}{۲}$$



$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{\frac{P}{۲}}{\frac{P}{۴}}=۲$$

۲۱۲ | ۲ **روش اول:** با توجه به شکل و فرض مسئله، $۲x+y=۸۸$ است، پس $y=۸۸-۲x$.

تابع مساحت مستطیل برابر است با:



$$S=x.y\Rightarrow S(x)=x(۸۸-۲x)=۸۸x-۲x^۲$$

$$x_{max}=-\frac{۸۸}{۲\times(-۲)}=-\frac{۸۸}{-۴}=۲۲\Rightarrow S_{max}=۲۲(۸۸-۴۴)=۹۶۸$$

روش دوم:

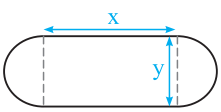
> ***نکته:*** اگر مجموع دو متغیر مثبت مقداری ثابت باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که دو متغیر با هم برابر باشند.

$$S(x)=x(۸۸-۲x)=۲(x)(۴۴-x)$$

مجموع دو متغیر x و $۴۴-x$ برابر مقدار ثابت ۴۴ است، پس حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی بیشترین مقدار است که $x=۴۴-x$، یعنی $x=۲۲$ و در آن صورت:

$$\max(S)=S(۲۲)=۲\times(۲۲)(۴۴-۲۲)=۹۶۸$$

۲۱۳ | ۱ اگر طول مستطیل x و عرض آن y باشد، باید xy ماکزیمم شود. با توجه به این‌که محیط کل ورزشگاه ۳۰۰ متر است، داریم:



$$\left\{\begin{array}{l}x+x+\frac{\pi y}{۲}+\frac{\pi y}{۲}=۳۰۰\Rightarrow ۲x+\pi y=۳۰۰\Rightarrow x=\frac{۳۰۰-\pi y}{۲}\\ S=xy\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow S=(\frac{۳۰۰-\pi y}{۲})y\Rightarrow S=-\frac{\pi}{۲}y^۲+۱۵۰y\Rightarrow y_{max}=-\frac{۱۵۰}{۲\times(-\frac{\pi}{۲})}=\frac{۱۵۰}{\pi}$$

محیط هر نیم‌دایره به قطر y برابر است با $\frac{\pi y}{۲}$. بنابراین محیط نیم‌دایرهٔ مفروض برابر است با:

$$\text{محیط}=\frac{\pi}{۲}y\xrightarrow{y=\frac{۱۵۰}{\pi}}\frac{\pi}{۲}\times\frac{۱۵۰}{\pi}=۷۵$$